Strategije rješavanja problemskih zadataka

Zirdum, Marijana

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI
DISLOCIRANI STUDIJ U SLAVONSKOM BRODU

: Marijana Zirdum

STRATEGIJE RJEŠAVANJA PROBLEMSKIH ZADATAKA

DIPLOMSKI RAD

Slavonski Brod, 2015.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI
DISLOCIRANI STUDIJ U SLAVONSKOM BRODU

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni učiteljski studij

STRATEGIJE RJEŠAVANJA PROBLEMSKIH ZADATAKA

DIPLOMSKI RAD

Predmet: Metodika matematike
Mentor: izv.prof.dr.sc. Zdenka Kolar-Begović
Student: Marijana Zirdum
Matični broj: 2250
Modul: C (pojačani engleski jezik)

Slavonski Brod, srpanj 2015.

Zahvaljujem svojoj obitelji koja mi je bila velika potpora
tijekom pisanja rada i cjelokupnog studija.
Zahvaljujem mentorici izv.prof.dr.sc. Zdenki Kolar – Begović
na pomoći i savjetima.
Također zahvaljujem učiteljicama koje su mi omogućile
provođenje istraživanja u njihovim razredima.

SAŽETAK

Problemski zadaci sastavni su i neizostavni dio nastave matematike te su integrirani u sve njene sadržaje. Učenici rješavanjem problemskih zadataka razvijaju različite oblike razmišljanja, metakogniciju, samopouzdanje, upornost i interes za matematiku.

Važno je osvijestiti učenike o postojanju različitih metoda i strategija rješavanja problemskih zadataka. Učitelji moraju promatrati kako učenici pristupaju rješavanju problemskih zadataka, kako samostalno otkrivaju nove strategije, objašnjavaju svoje postupke i uče na temelju vlastitog iskustva.

Cilj diplomskog rada bio je istražiti strategije rješavanja problemskih zadatka koje učenici četvrtog razreda koriste pri rješavanju kombinatornih zadataka te usporediti razlike s obzirom na učenike koji pokazuju poseban interes za učenjem matematike.

Ključne riječi: problemski zadaci, strategije rješavanja problema, kombinatorni zadaci

SUMMARY

Mathematical problems are integral and indispensable part of mathematics and they are integrated in all its contents. By problem solving pupils develop different forms of thinking, metacognition, self-confidence, persistence and interest for mathematics.

It is important to raise students' awareness about the existence of different methods and strategies of problem solving. Teachers must observe how pupils approach the problem solving, how they independently discover new strategies, explain their actions and learn from their own experience.

The aim of thesis was to investigate the problem-solving strategies that pupils in fourth grade use for solving combinatorial tasks and to compare the differences with regard to students who have shown particular interest in learning mathematics.

Keywords: problems, problem solving strategies, combinatorical problems

SADRŽAJ

1. UVOD 1
2. PSIHOLOŠKE OSNOVE POČETNE NASTAVE MATEMATIKE 2
3. TRADICIONALNA VS SUVREMENA NASTAVA 3
4. VRSTE ZADATAKA U MATEMATICI 4
5. PROBLEMSKI ZADACI 6
5.1. Vrste problemskih zadataka 6
5.2. Poteškoće u rješavanju problemskih zadataka 9
5.3. Metode rješavanja problemskih zadataka 11
5.3.1. Metoda rješavanja unatrag (inverzije) 11
5.3.2. Metoda lažne postavke 12
5.3.3. Metoda uzastopnog prebrojavanja 12
5.3.4. Logičke tablice (integrami) 13
5.3.5. Metoda uključivanja i isključivanja 14
5.3.6. Uočavanje pravilnosti uzorka 15
5.3.7. Promjena fokusa 15
5.3.8. Grafičko-aritmetička metoda 15
5.3.9. Metoda uzastopnih približavanja 16
5.4. Problemski zadaci – otkrivanje darovitih učenika 17
5.5. Kombinatorni problemski zadaci 19
6. STRATEGIJE RJEŠAVANJA PROBLEMSKIH ZADATAKA PREMA ENGLISH 20
6.1. Dvodimenzionalne strategije 20
6.2. Trodimenzionalne strategije 22
7. ISTRAŽIVAČKI DIO 25
8. METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA 26
8.1. Ciljevi i hipoteze istraživanja 26
8.2. Struktura uzorka 26
8.3. Materijali i postupak istraživanja 27
9. REZULTATI I RASPRAVA 29
9.1. Rezultati uspješnosti učenika u svakom od zadataka 29
9.2. Učestalost korištenja dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih strategija 30
9.2.1. Primjeri dvodimenzionalnih strategija koje su koristili učenici 32
9.2.2. Primjeri trodimenzionalnih strategija koje su koristili učenici 35

9.3. Rezultati uspješnosti rješavanja 3. zadatka ... 38
9.4. Usporedba rezultata prema spolu ... 41
9.5. Rezultati učenika koji pokazuju poseban interes za matematiku ... 45
9.5.1. Strategije korištene u 1. zadatku ... 46
9.5.2. Strategije korištene u 2. zadatku ... 47
9.5.3. Rješenja 3. zadatka ... 48
10. ZAKLJUČAK ... 50
11. LITERATURA ... 51
PRILOZI ... 53
ŽIVOTOPIS ... 54

1. UVOD

Nastava matematike prema nacionalnom planu i programu odvija se kroz dvije istaknute dimenzije matematičkog obrazovanja: matematičke procese i matematičke koncepte (sadržaje) (prema NOK 2009) Učenici do kraja četvrtog razreda (prvog odgojno obrazovnog ciklusa) trebaju usvojiti osnovna matematička znanja potrebna za opisivanje i rješavanje konkretnih problema iz njihovog neposrednog okruženja. U okviru matematičkih zadataka učenici se susreću i s problemskim zadacima čije rješavanje zahtijeva različite metode i strategije. „Problemski zadaci su prekrasan spoj kognitivnih, jezičnih, matematičkih i perceptivnih aspekata. U većini slučajeva matematičke vještine trebaju nam u životu u svrhu rješavanja kvantitativnih situacija i problema." (Sharma, 2001., 70)

Rješavanjem problemskih zadataka učenici bi trebali povezati sadržaje matematike sa spoznajama iz svakodnevnoga života te uvidjeti važnost matematike u vlastitom životu.
Također rješavanje matematičkih problema razvija kreativnost, sustavnost u radu, logičko mišljenje i zaključivanje.

„Poučavanje je problemskih matematičkih zadataka bitno jer potiče razvoj konceptualnog znanja djece o aritmetičkim operacijama i drugim matematičkim pojmovima te omogućuje primjenu znanja o računanju u kontekstu stvarnoga svijeta" (Briars i Larkin, 1984; Carpenter, 1986; Schroeder i Lester, 1989, prema Pavlin-Bernardić, Rovan, Vlahović – Štetić 2011).

Motiv za odabir teme ovog diplomskog rada bila je želja da istražim na koji način učenici rješavaju problemske zadatke te kojim strategijama se pritom koriste. Postavljanje zadataka koje učenici mogu percipirati, u koje se mogu uživjeti i koje mogu zamisliti u svojoj neposrednoj okolini dovesti će do lakšeg zaključivanja i kasnije rješavanja numeričkih zadataka. Vođena citatom matematičara René Descartesa *„Svaki problem koji sam riješio postao je pravilo koji je poslije služio za rješavanje drugih problema."* odlučila sam detaljnije proučiti dostupnu literaturu i istražiti koje to strategije učenja koriste učenici u početnoj nastavi matematike, pritom usvajajući nova znanja i razvijajući kreativne strategije rješavanja.

2. PSIHOLOŠKE OSNOVE POČETNE NASTAVE MATEMATIKE

Teorija kognitivnog razvoja koju zagovara Piaget dijeli kognitivni razvoj na 4 faze: senzomotorička faza (0-2 godine), faza predoperacijske misli (2-7 godina), faza konkretnih operacija (7-11 godina) i faza formalnih operacija (od 12 godina nadalje). Na početku školovanja, u dobi od 6 do 7 godina, učenici se nalaze na početku jednog od nekoliko karakterističnih stadija intelektualnog razvoja, konkretno-operativnog stadija.

Faza konkretnih operacija važna je za učenike jer se tada razvija sposobnost logičkog mišljenja, uz uvjet da se zadaci potkrepljuju osjetilnim podacima. Kod djeteta se pojavljuje mogućnost logičkog razmišljanja i mogućnost konzervacije na poznatim i konkretnim sadržajima (stvaranje pojmova, uviđanje odnosa i rješavanje problema). Faza konkretnih operacija obilježena je i klasifikacijom kao sposobnošću uočavanja nadređenog načela koje omogućava logičko razvrstavanje predmeta u skupini (Liebeck, 1995., Markovac 2001., Buggle, 2002). Piaget je smatrao da kognitivni razvoj sva djeca prolaze jednakim redoslijedom te da ne postoji mogućnost da se poučavanjem ubrza prolazak kroz pojedine faze, što su osporavali mnogi znanstvenici koji su svojim istraživanjima dolazili do suprotnih zaključaka. (Bruner, Skemp, Dienes McGarrigle, Donaldson, prema Liebnick, 1995)

Cotič i Felda (2007) navode da se konkretna razina ne smije izostaviti kada se formiraju matematičke ideje na početku obrazovanja, kada su učenici u fazi konkretnog razmišljanja. Također ističu da konkretna razina ne smije biti prekratka ili izostavljana jer je to obično razlog nerazumijevanja osnovnih matematičkih pojmova (Cotič i Felda, 2007).

Upravo zbog toga je važno da se u nastavi matematike pojavljuju zadaci u kojima se učenici upoznaju sa svakodnevnom stvarnosti u kojoj žive, da u rješavanju zadataka koriste materijale koji ih okružuju te samostalnim logičkim zaključivanjem dolaze do rješenja i na taj način razvijaju mišljenje, kreativnost, originalnost i upornost.

3. TRADICIONALNA VS SUVREMENA NASTAVA

Istraživanje koje su provele Kos, Glasnović Gracin (2012) pokazalo je da je u našim školama još uvijek prisutna tradicionalna nastava matematike u kojoj dominira tehnika nad idejama te rješavanje simboličkih zadataka. Kao posljedica i zaključak tog istraživanja, autorice daju sugestije u obliku povećanja problemskih zadataka koji potiču mišljenje, kreativnost, istraživanje, otkrivanje i izražavanje te smatraju da je učenje kroz primjenu problemskih zadataka ključan čimbenik uspješne nastave matematike. (Kos, Glasnović Gracin, 2012)

English (2007) u svom istraživanju navodi važnost rješavanja matematičkih problema u kojima djeca nemaju poznat postupak rješavanja te moraju razviti vlastite strategije za postizanje cilja. Autorica navodi da ako želimo da matematičko razmišljanje i rješavanje problema dobiju status koji zaslužuju u nastavi, učitelji moraju prepoznati različite sposobnosti djece te ih dovesti do novih zadataka i načina u kojima samostalno razvijaju sofisticiranije i raznolikije procese rješavanja.

Verschaffel i DeCorte (Verschaffel i DeCorte 1993. ,prema Vlahović-Štetić, Vizek-Vidović, 1998) su provele istraživanje u obliku proučavanja prakse u belgijskim školama te su uočili kako pouka u računanju uvijek prethodi problemskim zadacima, uz očekivanje da će djeca kasnije primijeniti naučene procedure pri rješavanju problema.

Autori navode da su rezultati njihova jednogodišnjeg eksperimentalnog programa poučavanja matematike pokazala da je bolje prvo poučavati problemske zadatke, a tek potom uvesti odgovarajuće brojčane izraze. Na taj način učenje započinje problemima s kojima djeca već imaju iskustva, a neke uspješno rješavaju i prije početka formalnog obrazovanja. Takvo poučavanje poboljšava i razumijevanje brojčanih izraza koji služe kao simbolički prikaz problema. U takvoj nastavi učenik postaje aktivan sudionik procesa učenja pri čemu otkriva veze između onoga što je dano i što se traži, ne poznaje postupak rješavanja problema već taj problem dovodi u vezu s lakšim zadacima koje može riješiti i na taj način pronalazi nove načine rješavanja. (Verschaffel i DeCorte 1993.,prema Vlahović-Štetić, Vizek-Vidović, 1998). Dakle autorice ističu da bi rješavanje problemskih zadataka trebalo bi prethoditi učenju računskih radnji.

„Suvremena nastava podrazumijeva da učenici: rješavaju problemske zadatke, primjenjuju strategije, uočavaju pravila, konstruiraju znanja i sistematiziraju znanja.“[1]

---

[1] [1]Problemska nastava matematike. Cindrić, M. Sveučilište u Zadru Pribavljeno 26.1.2015. www.**matematika**.hr/index.php/download_file/582/297/

4. VRSTE ZADATAKA U MATEMATICI

Postoji više vrsta matematičkih zadataka ovisno o karakteristikama po kojima ih dijelimo. Zadatke možemo razlikovati prema složenosti i težini.

„Težina zadatka subjektivni je doživljaj pojedinog učenika, kategorija koja odražava odnos između učenika i zadatka. Složenost je objektivna kategorija koja ovisi o odnosima traženih i danih veličina u zadatku.“ (Kurnik, 2000: 52)

Kurnik (2000) prema složenosti i težini matematičke zadatke dijeli na standardne i nestandardne.

„Standardni zadaci su zadaci kod kojih nema nepoznatih sastavnica: uvjeti su postavljeni jasno i precizno, cilj je očigledan, teorijska osnova se lako uočava i bez dublje analize, a način rješavanja je poznat i on teče prirodno i prema očekivanjima.

Nestandardni zadaci su zadaci kod kojih je bar jedna sastavnica nepoznata. Ako su nepoznate dvije ili više sastavnica, nestandardni zadaci nazivaju se još i problemski zadaci. Rješavanje takvih zadataka višestruko je korisno, jer ono omogućuje razvijanje logičkog mišljenja i provođenje nevelikih samostalnih istraživanja. Za njega je potreban pojačan umni napor, dublja analiza, veća koncentracija, ustrajnost i dosjetljivost.“ (Kurnik, 2000: 52-53)

Nastava matematika nezamisliva je bez rješavanja računskih zadataka koji se mogu pojaviti u više različitih oblika. Svaki matematički zadatak s kojim se učenik susreće sadrži poznate elemente i nepoznate koji se trebaju otkriti ili objasniti rješavanjem samog zadatka.

Markovac (2001), s obzirom na svrhu kojoj su namijenjeni i način oblikovanja, dijeli računske zadatke u nastavi matematike u četiri karakteristične skupine: numerički ili zadaci brojevima, tekstualni ili zadaci riječima, zadaci s veličinama i geometrijski zadaci.

Zadaci zadani riječima, tzv. tekstualni zadaci često su nazivani i problemskim zadacima, no tu nije riječ o sinonimima.

„Tekstualni zadatak zapravo je logički strukturirana govorna cjelina koja sadržava kvantitativne podatke u različitim odnosima i vezama te zahtjev da se iz poznatih uvjeta i podataka pronađe nepoznat broj ili veličina. Tekstualnim zadacima učenici na specifičan način upoznaju svakodnevnu stvarnost u kojoj žive i rade.“ (Markovac, 2001., prema Kos, Glasnović Gracin, 2012)

Tekstualni zadaci ili zadaci riječima mogu biti stavljeni u određeni kontekst, u određenu autentičnu ili realističnu situaciju. U takvom je zadatku, navode autorice, cilj riješiti zadanu problemsku situaciju, odgovarajućim matematičkim aparatom doznati nepoznati podatak, razvijati strategije rješavanja problemskih situacija unutar zadatka te razvijati matematičko izražavanje. (Kos, Glasnović Gracin 2012). Autentična situacija označuje situaciju koja je originalna svakodnevnici, dok realistična situacija imitira autentičnu situaciju tako da se koriste druga imena i nazivi u zadatku. Zadaci s realističnim i autentičnim kontekstom pomažu u povezivanju matematičkog gradiva sa svakodnevnicom, što je svakako jedan od ciljeva važećeg programa za matematiku (MZOŠ, 2009, prema Kos, Glasnović Gracin 2012) Tekstualni zadaci koji nisu stavljeni u kontekst iz svakodnevnice sadrže unutarmatematičke situacije, npr. *Od zbroja brojeva 5 i 8 oduzmi broj 2*.

5. PROBLEMSKI ZADACI

Problemski zadaci su vrsta nestandardnih zadataka koji se u nastavi matematike rijetko pojavljuju dok su neizostavni dio matematičkih natjecanja.(Kurnik, 2000)

„Rješavanje problemskih zadataka je proces koji uključuje nekoliko uzajamno povezanih procesa: prepoznavanje prisutnosti problema, formuliranje problema, primjenu različitih strategija za rješavanje problema, rješavanje problema, provjeru i tumačenje rezultata i konačno uopćavanje odgovora.“(Sharma, 2001., 103)

„Rješavanje problema u nastavi:

- Potiče učenike na različite oblike razmišljanja, kao i razvoj metakognicije
- Potiče učenike na razvoj upornosti i znatiželje
- Kod učenika razvija pouzdanje u savladavanju novih i nepoznatih situacija“[2]

Problemski zadatak je svaki matematički zadatak koji od učenika traži neki novi angažman, novi misaoni napor koji je postavljen tim problemom.

„Rješavanje matematičkog problemskog zadatka zahtijeva razvijenost kognitivne inteligencije: sposobnosti analiziranja, sintetiziranja, apstrahiranja, poopćavanja, primjene stečenih znanja i vještina u novim situacijama, shvaćanje smisla problema, pronalaženje strategija za njihovo rješavanje i dr“ (Sharma, 2001. 10).

5.1. Vrste problemskih zadataka

Vlahović-Štetić, Vizek-Vidović (1998) smatraju da je važno razlikovati problemske zadatke, poznavati kognitivne zahtjeve koje zadaci postavljaju pred djecu i sustavno poučavati različite vrste zadataka kako bismo prilagodili nastavu učenicima. One navode uobičajenu psihologijsku klasifikaciju problemskih zadataka zbrajanja i oduzimanja koju su uveli Riley i suradnici. Prema njima problemski se zadaci mogu razvrstati u tri skupine: u zadatke kombiniranja, zadatke promjene i zadatke usporedbe (Riley i sur., 1983). Svi ovi zadaci definiraju neke količine i opisuju odnose medu njima.

Primjer zadatka kombiniranja u kojem je riječ o dva skupa koje valja ujediniti ili razjediniti:

- Marija ima 3 lutke . Petra ima 5 lutki. Koliko lutki imaju zajedno?

Primjer zadatka promjene u kojem zbrajanje ili oduzimanje uzrokuje uvećanje ili umanjenje

---

[2]Problemska nastava matematike. Cindrić, M. Sveučilište u Zadru Pribavljeno 26.1.2015. www.**matematika**.hr/index.php/download_file/582/297/

početne količine:

- Marija je imala 3 lutke. Petra joj je dala 2 lutke. Koliko lutki Marija ima sada?

Primjer zadataka usporedbe u kojem postoje dva statična skupa koji se ne mijenjaju već valja pronaći razliku medu njima:

- Marija ima 3 lutke. Petra ima 5 lutki. Koliko lutki Petra ima više od Marije?

Vlahović-Štetić, Vizek-Vidović, (1998) donose detaljan tablični prikaz dodatne podjele zadataka s obzirom na položaj nepoznate količine unutar svake od tri glavne skupine zadataka, kao što je vidljivo na slici 1.

Vrsta zadatka	Primjer zadatka	Nepoznata količina
Kombiniranje		
K1	Ivan ima 3 pikule. Petar ima 5 pikula. Koliko pikula imaju zajedno?	nadskup
K2	Ivan i Petar imaju nekoliko pikula. Ivan ima 3 pikule. Petar ima 5 pikula. Koliko pikula imaju zajedno?	nadskup
K3	Ivan ima 3 pikule. Petar ima nekoliko pikula. Oni zajedno imaju 8 pikula. Koliko pikula ima Petar?	podskup
K4	Ivan ima nekoliko pikula. Petar ima 5 pikula. Oni zajedno imaju 8 pikula. Koliko pikula ima Ivan?	podskup
K5	Ivan i Petar imaju zajedno 8 pikula. Ivan ima 3 pikule. Koliko pikula ima Petar?	podskup
K6	Ivan i Petar imaju zajedno 8 pikula. Ivan ima nekoliko pikula. Petar ima 5 pikula. Koliko pikula ima Ivan?	podskup
Promjena		
P1	Ivan je imao 3 pikule. Onda mu je Petar dao 5 pikula. Koliko pikula ima Ivan sada?	završni skup
P2	Ivan je imao 8 pikula. Onda je dao Petru 5 pikula. Koliko pikula ima Ivan sada?	završni skup
P3	Ivan je imao 3 pikule. Onda mu je Petar dao nekoliko pikula. Sada Ivan ima 8 pikula. Koliko mu je pikula dao Petar?	mijenjajući skup
P4	Ivan je imao 8 pikula. Onda je dao nekoliko pikula Petru. Sada Ivan ima 3 pikule. Koliko je pikula dao Petru?	mijenjajući skup
P5	Ivan je imao nekoliko pikula. Onda mu je Petar dao 5 pikula. Sada Ivan ima 8 pikula. Koliko je pikula Ivan imao u početku?	početni skup
P6	Ivan je imao nekoliko pikula. Onda je dao 5 pikula Petru. Sada Ivan ima 3 pikule. Koliko je pikula Ivan imao u početku?	početni skup
Usporedba		
U1	Ivan ima 8 pikula. Petar ima 5 pikula. Koliko pikula više ima Ivan od Petra?	razlika skupova
U2	Ivan ima 8 pikula. Petar ima 5 pikula. Koliko pikula manje ima Petar od Ivana?	razlika skupova
U3	Ivan ima 3 pikule. Petar ima 5 pikula više od Ivana. Koliko pikula ima Petar?	uspoređeni skup
U4	Ivan ima 8 pikula. Petar ima 5 pikula manje od Ivana? Koliko pikula ima Petar?	uspoređeni skup
U5	Ivan ima 8 pikula. On ima 5 pikula više od Petra. Koliko pikula ima Petar?	referentni skup
U6	Ivan ima 3 pikule. On ima 5 pikula manje od Petra. Koliko pikula ima Petar?	referentni skup

Slika 1. Vrste problemskih matematičkih zadataka zbrajanja i oduzimanja prema Riley.Greeno (Vlahović-Štetić, Vizek-Vidović, 1998.78)

Mnogobrojna istraživanja bavila su se razlikama u uspješnosti dječjeg rješavanja pojedinih vrsta problemskih zadataka (Cummins i sur., 1988.; Riley i Greeno, 1988.; Stern i Lehndorfer, 1992.; Verschaffel i sur., 1992. Hegarty i sur.1995), a njihovi rezultati pokazuju kako su, u pravilu, zadaci kombiniranja najlakši, dok su zadaci promjene teži, a zadaci usporedbe su najteži.

Istraživači su pokušavali pronaći odgovor na pitanje zašto su neki zadaci laki, a drugi teški. Većina istraživanja pronalazila je teorijsko uporište u Piagetovoj teoriji kognitivnog razvoja koja govori o razvoju koji prolazi kroz niz univerzalnih faza čiji je redoslijed nepromjenljiv. Uradak djece na zadacima mijenja se s dobi, tj. s kognitivnim razvojem djeteta, odnosno sazrijevanjem dijete uspješno rješava zadatke koje ranije nije moglo riješiti. Međutim, postoje različite pretpostavke o tome koji kapaciteti svojim razvojem pridonose uspješnijem rješavanju problema. (Vlahović-Štetić, Vizek- Vidović, 1998)

Vlahović-Štetić, Vizek- Vidović (1998) i Klasnić (2009) navode da neki autori smatraju da uspješno rješavanje problema ovisi o razvoju logičko-matematičkih sposobnosti i znanja (matematičko-logički modeli), dok drugi autori naglašavaju važnost dječjeg razumijevanja i interpretiranja teksta zadatka (lingvistički modeli).

Prema lingvističkim modelima rješavanje problemskoga zadatka započinje razumijevanjem teksta na temelju čega se stvara reprezentacija teksta koja predstavlja osnovicu za matematičko rješavanje zadatka (Klasnić, 2009).

Zanimljive rezultate u prilog ovom gledištu dao je Hudson (1983) svojim eksperimentom provedenim na djeci mlađe predškolske dobi, predškolcima i učenicima prvog razreda. Hudson je djeci zadavao dva zadatka jednaka po brojčanom izrazu, ali ponešto različitog teksta. Bolje rezultate ostvarili su ona djeca koja su imala smisleniji tekst.

Na temelju svog ispitivanja Hudson zaključuje kako djeci ne nedostaje matematičko znanje za usporedbu dva skupa, već je riječ o nerazumijevanju teksta zadatka koji traži usporedbu dva skupa. Jasniji tekst pomaže dječjem razumijevanju zadatka, a to onda vodi boljem uratku pri rješavanju postavljenih problemskih zadataka. (Hudson 1983., prema Vlahović-Štetić, Vizek- Vidović 1998) Još jedan važan činitelj doprinosi uspješnom rješavanju problemskih zadataka, a to je dječje razumijevanje situacije u zadatku. Nije dovoljno razumjeti jezik, dijete mora točno protumačiti radnju zadatka, mora razumjeti što se zbiva i zašto.

Rezultati koje su dobile Stern i Lehrndorfer (1992) potvrđuju ovu pretpostavku. One su 45 učenika prvog razreda podijelile u tri skupine od kojih je svaka skupina rješavale problemske zadatke identične po brojčanom izrazu, ali različite po tekstu. Prva skupina rješavala je zadatke s usklađenim kontekstom, druga skupina rješavala je zadatke s neusklađenim kontekstom, tj. priča u zadatku nije bila u skladu sa završnom tvrdnjom i pitanjem, a treća skupina rješavala je situacijski neutralne zadatke, tj. nije bilo usporedbi likova u tekstu. Rezultati pokazuju kako su djeca najuspješnija ukoliko rješavaju zadatke čiji je tekst usklađen sa završnim pitanjem. (Stern, Lehrndorfer 1992., prema Vlahović-Štetić, Vizek- Vidović 1998)

5.2. Poteškoće u rješavanju problemskih zadataka

Problemski zadaci mogu biti teški zato što djeca još nisu razvila neke matematičko-logičke kapacitete nužne za njihovo rješavanje, zato što ne razumiju vrlo složen jezik u zadatku ili zato što ne razumiju situaciju o kojoj govori tekst zadatka.

Sharma (2001. 235) navodi u svojoj knjizi da su matematički zadaci namijenjeni da prikažu učeniku kako se matematika primjenjuje u rješavanju stvarnih životnih problema. Sharma navodi da su neki zadaci dobri, dok neki zbunjuju djecu i mogu postati izvorom tjeskobnih osjećaja, što se nerijetko događa jer učenici sa svog gledišta promatraju stvarnu životnu situaciju u kojoj problem često ima više načina rješavanja.

Vlahović-Štetić, Vizek-Vidović, (1998) smatraju da školske problemske zadatke djeca najčešće tumače kao apstraktne probleme koji zahtijevaju izvođenje nekih operacije sa zadanim brojevima. Znajući da je važno nešto izračunati djeca se ne udubljuju u tekst zadatka i ne razmišljaju što je stvarni odgovor na zadani problem. Tako je moguće da od 97 učenika prvog i drugog razreda njih 76 na zadatak: *"Na brodu je 26 ovaca i 10 koza. Koliko je star kapetan?"* odgovori: *"36 godina"* (Schoenfeld, 1991., prema Vlahović-Štetić, Vizek-Vidović, 1998).

Zanimljivi su podaci koji govore da lošiji rješavači problemskih zadataka većinu vremena provedenog na rješavanju zadatka provode gledajući u brojke (57 % vremena). Uspješni rješavači većinu vremena na zadatku provode gledajući u tekst zadatka (67 % vremena. Nalazi potvrđuju kako dobri rješavači pokušavaju razumjeti u čemu je problem zadatka, dok su oni lošiji orijentirani na matematičke operacije zadanim brojevima (Verschaffel i DeCorte,1993. prema Vlahović-Štetić, Vizek- Vidović 1998). Ako su problemski zadaci uvijek zadavani uz poučavanje konkretne matematičke operacije (npr. uz dijeljenje), tada i strategija koja je orijentirana isključivo na primjenu matematičke operacije može dovesti do točnog rješenja zadatka. Na taj način dijete uči da tekst zadatka nije važan.

Autorice ističu da bi poučavanje matematike trebalo započeti rješavanjem problemskih zadataka. Zadaci bi trebali biti realistični i usklađeni s dječjim iskustvom. Dječji uradak olakšat će jasan tekst zadatka, uporaba imena djece iz razreda i likovi u zadatku koji su u nekoj međusobnoj vezi. Na takav način djeca bi lakše uočila elemente bitne za rješenje i uspješnije razvila primjerene strategije rješavanja.

Sharma (2001. 236) preporučuje da se djeci nude jednostavnije i jasne problemske situacije kako bi shvatili da matematika nije samo školski predmet nego životno potrebna aktivnost. Važno je djecu poučiti svim vrstama problemskih zadataka. Poučavanje treba započeti lakšim zadacima kombiniranja, ali oni ne smiju biti jedini zadaci koje dijete susreće u početnoj školskoj matematici. Nakon njih valja poučavati i zadatke promjene i zadatke usporedbe. Samo tako možemo osposobiti dijete da u novim situacijama bude uspješno.

Dječji uradak u zadacima i razvoj strategija može biti olakšan uporabom konkretnog materijala. Istraživanja koja su proveli Riley i Greeno, (1988) pokazuju da će ako koriste konkretan materijal prilikom rješavanja zadataka uradak mlade djece, ali i učenika četvrtog razreda osnovne škole biti bolji. Uporaba kockica, štapića i ostalih materijala može pomoći učiteljici da uvidi strategiju koju djeca rabe pri rješavanju zadataka. Pri rješavanju istog zadatka djeca mogu rabiti međusobno različite strategije, razmjenjivati iskustva te otkriti nove strategije rješavanja zadataka. Svako dijete treba imati mogućnost da podijeli svoja i tuđa iskustva u rješavanju zadataka, ali nema neke strategije koja bi bila "najbolja" za svu djecu. To znači da će dijete tijekom rada s konkretnim materijalom samo odabrati najprikladniji način prikazivanja i rješavanja pojedinog zadatka.

Rješavajući raznovrsne standardne i nestandardne zadatke učenici ovladavaju sve većim znanjem i stječu sve bolje iskustvo u toj djelatnosti, no sposobnost rješavanja problemskih zadataka razvija se uspješnije i brže ako to ne postižu samo rješavanjem velikog broja zadataka, već upoznavanjem i usvajanjem različitih metoda rješavanja zadataka. (Kurnik 2000).

Neke od metoda rješavanja problemskih zadataka primjerenih učenicima objasniti ću u nastavku.

5.3. Metode rješavanja problemskih zadataka

Rene Decartes tragao je u svojim istraživanjima za univerzalnom metodom rješavanja problema, zasnovanoj na ideji da se bilo koji problem može svesti na rješavanje jednadžbi. No univerzalna metoda ne može postojati. Decartesova ili algebarska metoda je najčešće prvi izbor kod rješavanja tekstualnih problemskih zadataka, no uz nju korisno je poznavati i ostale metode rješavanja tekstualnih zadataka. Učenici mlađe školske dobi prema predviđenom programu ne obrađuju jednadžbe. Prilikom rada na dodatnoj nastavi i pri pripremi učenika za natjecanje učitelj mora upoznati učenike s metodama rješavanja problemskih zadataka bez korištenja jednadžbi.

Za različite vrste problema uvode se i razvijaju posebne metode rješavanja. U metodici nastave matematike razvija se metodika rješavanja zadataka čije je središnje pitanje kako naučiti učenike rješavati zadatke. Jedan od njezinih glavnih ciljeva je, navodi Kurnik, naučiti učenike prepoznavati zadatke iz iste klase. Metodika rješavanja zadataka pomaže da se proces rješavanja bilo kojeg zadatka svede na što je moguće manji broj nepoznanica i na taj način podigne razina uspješnosti rješavanja.

Danas je uobičajeno da se proces rješavanja zadataka dijeli u četiri etape:

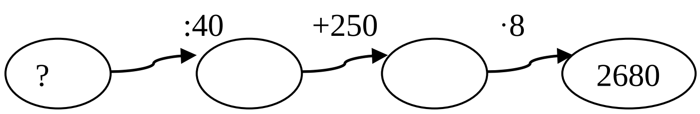
1. razumijevanje zadatka,
2. stvaranje plana,
3. izvršavanje plana i
4. osvrt. (Kurnik, 2000)

5.3.1. Metoda rješavanja unatrag (inverzije)

Kao što joj samo ime kaže, zadatak počinjemo rješavati unatrag, krećući od posljednjeg danog podatka u zadatku. Varošanec (2014) daje primjere zadataka u kojima je najprimjerenija i najčešće korištena metoda rješavanja unatrag.

Zadatak. Ako neki broj podijelimo sa 40 pa dobivenom količniku pribrojimo 250 i dobiveni zbroj pomnožimo s 8 dobit ćemo broj 2680. Koji je početni nepoznati broj?

Rješenje. Rješavanje ovakvog zadatka dobro je prikazati sličicom, nizom oblačića spojenih linijama iznad kojih se nalaze napisane računske radnje, kao što je prikazano na slici 1..



Zadatak. Premještanja – 126 učenika osmih razreda krenulo je s 3 autobusa na izlet. Na prvom stajalištu iz trećeg autobusa prijeđe u drugi 8 učenika. Na drugom stajalištu iz drugog autobusa u prvi prijeđe 4. i konačno na trećem stajalištu iz prvog autobusa u treći prijeđe 6 učenika. Kad su nastavili vožnju u svakom je autobusu bio jednak broj učenika. Koliko je učenika bio u svakom autobusu na početku putovanja?

Rješenje. Rješavanje ovakvog tipa zadatka može se prikazati u tablici (tablica 1.).

Tablica 1. Prikaz rješavanja zadatka metodom unatrag

Stajalište	I. autobus	II. autobus	III. autobus
na kraju	42	42	42
prije 3.stajališta	48	42	36
prije 2. stajališta	44	46	36
prije 3. stajališta	44	38	44

Zadatak. Ostatci – Mario je prvi dan pročitao 1/3 knjige, drugi dan 3/4 nepročitanog dijela knjige, a za treći mu je dan ostalo 60 stranica. Koliko stranica ima knjiga?

Rješenje. Krećemo od zadnjeg danog podatka u zadatku. Broj 60 predstavlja 3/4 nepročitanog dijela knjige nakon prvog dana. Prema tome, dio knjige koji je nepročitan ima ukupno 4•60= 240 stranica. Ako je taj broj 2/3 knjige, znači da je 1/3 knjige 120 stranica, a cijela knjiga ima 3•120=360 stranica.

5.3.2. Metoda lažne postavke

Ova metoda polazi od toga da se pretpostavi da je neki broj rješenje jednadžbe. Provodeći operacija dane u zadatku tim brojem dolazimo do saznanja koliko je puta dobiveni broj veći ili manji od rješenja zadatka. Na temelju dobivenog odnosa ispravljamo početnu pretpostavku i dolazimo do rješenja zadatka.

Zadatak. Glava ribe čini jednu trećinu ribe, rep ribe čini jednu četvrtinu ribe, a tijelo ribe ima masu 30 dag. Kolika je masa cijele ribe?

Rješenje. Ovaj zadatak rješavamo metodom lažne postavke na način da pretpostavimo da je masa ribe 12 dag, glava ribe je prema tome 4 dag (12/3), rep ribe je 3 dag (12/4) i tijelo ribe je 12-4-3=5 . Broj 30 (masu tijela ribe), podijelimo s 5 i dobijemo da je pretpostavka 6 puta manja od rješenja. U skladu s dobivenim odnosom ispravimo početnu pretpostavku i dolazimo do mase cijele ribe 12•6= 72. Masa cijele ribe je 72 dag.

5.3.3. Metoda uzastopnog prebrojavanja

Kao što navodi Pavleković u svojoj knjizi, metoda uzastopnog prebrojavanja koristi se kao metoda rješavanja zadataka u kombinatorici. Zasniva se na principu množenja ili uzastopnog prebrojavanja koje glasi: Ako ima n načina da se izvrši jedna radnja i m načina da se izvrši druga radnja, onda ima ukupno $n\cdot m$ načina da se izvedu obje radnje istovremeno.

Zadatak. Koliko se četveroznamenkastih brojeva može sastaviti od znamenaka 0, 1, 2, 3, 4 ako sve znamenke u četveroznamenkastom broju moraju biti različite?

Rješenje. Na prvom mjestu može se pojaviti bilo koja znamenka različita od 0, što znači da imamo 4 mogućnosti. Na drugom mjestu može se pojaviti bilo koja od 4 preostale znamenke, što znači da opet imamo 4 mogućnosti. Na trećem mjestu pojaviti će se neka od preostale 3 znamenke, što znači da imamo 3 mogućnosti. I na kraju, na četvrtom mjestu može se pojaviti neka od preostale 2 znamenke što znači da imamo 2 mogućnosti. Traženih brojeva ima $4\cdot4\cdot3\cdot2=96$.

5.3.4. Logičke tablice (integrami)

Matematičke zagonetke, logičke zadatke možemo rješavati pomoću logičkih tablica. Metoda se sastoji u tome da se u tablicu unesu podaci iz teksta zagonetke i na taj način zadatak učini preglednim i iz tablice se jednostavno očita rješenje. Ono što daje čar tim zadacima je činjenica da pri njihovom rješavanju ne treba ništa računati, već samo pravilno logički zaključivati. Ako postoji veza među podacima pišemo znak plus (+), a ako ne postoji veza pišemo znak minus (-) .

Zadatak. Tri prijateljice Marija, Ivana i Petra različitih su zanimanja. Jedna je učiteljica, druga je liječnica, a treća je pravnica. Učiteljica je najmlađa i ona nema ni braće ni sestara. Ivana je udana za Marijinog brata, a Petra je starija od liječnice. Čime se bave Marija, Ivana i Petra?

Rješenje. Zadatak ćemo riješiti tako da napravimo tablicu i upišemo podatke. Učiteljica je najmlađa i ona nema braće ni sestara, iz te rečenice vidimo da Marija nije učiteljica jer ona ima brata. Kod Marije u stupcu učiteljica pišemo minus. Petra je starija od liječnice, iz čega vidimo da Petra nije liječnica, niti je učiteljica jer je učiteljica najmlađa. Iz toga zaključujemo da je Petra pravnica. Kod retka Petra stavljamo plus u stupac pravnica, a kod stupca učiteljica u Petrinom retku pišemo minus. U stupcu učiteljica imamo 2 minusa, što znači da je preostala osoba točan odgovor. Ivana je učiteljica. U Marijinom retku ostaje nam jedno mjesto za znak plus, što nam govori da je Marija liječnica.

Jednostavnim logičkim zaključivanjem, upisivanjem pluseva i minusa u odgovarajuće stupce kako što se vidi u tablici 2., došli smo do rješenja zadatka, a ono glasi: Marija je liječnica, Ivana je učiteljica i Petra je pravnica.

Tablica 2. Prikaz rješavanja zadatka logičkim tablicama

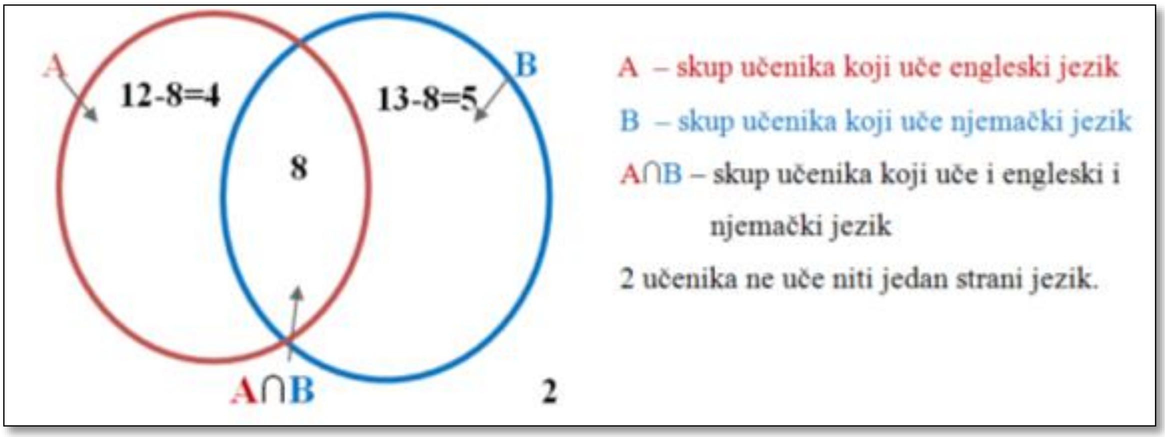
	Učiteljica	Liječnica	Pravnica
Marija	-	+	-
Ivana	+	-	-
Petra	-	-	+

5.3.5. Metoda uključivanja i isključivanja

Ova metoda sastoji se u primjeni formule za kardinalne brojeve konačnih skupova A i B k(AUB)= k(A) + k(B) – k(A∩B). Uniju dvaju skupova A i B izračunat ćemo tako da zbrojimo kardinalni broj skupa A i kardinalni broj skupa B, a zatim oduzmemo kardinalni broj presjeka skupova A i B.

Zadatak. U jednom razrednom odjelu 12 učenika uči engleski jezik, 13 učenika uči njemački jezik, dok 2 učenika ne uče niti jedan strani jezik. Oba strana jezika uči 8 učenika. Koliko je učenika u tom razrednom odjelu?

Rješenje. Zadatak možemo riješiti Vennovim dijagramima kao što je prikazano na slici 1.Na slici možemo vidjeti da od ukupnog broja učenika koji uči engleski jezik trebamo oduzeti broj učenika koji uči oba strana jezika, kako bismo dobili broj učenika koji uči samo engleski jezik. Isti slučaj je i s učenicima koji uče njemački jezik. Jednostavnim prebrojavanjem dolazimo do ukupnog broja učenika u tom razrednom odjelu, a to je 4+8+5+2=19. Ovaj zadatak moguće je riješiti i uz pomoć kardinalnih brojeva:



Slika 2. Grafički prikaz rješavanja zadatka Vennovim dijagramima

A - skup učenika koji uče engleski jezik

B - skup učenika koji uče njemački jezik

A∩B= skup učenika koji uče i engleski i njemački jezik

2 učenika ne uče niti jedan strani jezik.

k(AUB) = k(A) + k(B) – k(A∩B)

k(AUB) = 12 + 13 – 8= 17

17 +2 = 19

5.3.6. Uočavanje pravilnosti uzorka

Ova metoda odnosi se na uočavanje uzorka u zadacima nastavljanja niza gdje se ponavlja određeni uzorak te učenici trebaju uočiti tu pravilnost. Ova metoda razvija sposobnost promatranja, uočavanja, stvaranja analogija i generalizacija.

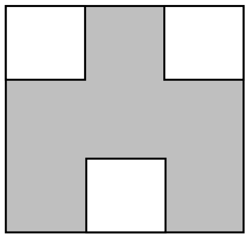
Zadatak. Nastavi niz 1, 3, 6, 10, 15,… ,…, …. .

Rješenje. Učenici rješavaju ovakve zadatke na način da promatraju razliku između brojeva koji se nalaze u nizu. U ovom slučaju razlika između susjednih brojeva se povećava za 1, tj. 3-1=2, 6-3=3, 10-6=4, 15-10=5,... Prema tome brojevi koji će slijediti su 21, 28, 36.

5.3.7. Promjena fokusa

Ova metoda kao što joj samo ime kaže usmjerava učenike da promjene svoj fokus i usmjere svoju pažnju na poznate elemente koji bi pomogli u rješavanju zadatka.

Zadatak. Izračunaj površinu osjenčanog dijela kvadrata.



Rješenje. Zadatak naizgled može djelovati teško i komplicirano, no zapravo je potrebno promijeniti stajalište i usmjeriti se na veliki kvadrat koji obuhvaća sva tri manja kvadrata i osjenčani dio. Zatim izračunamo površinu većeg kvadrata i od te površine oduzmemo površine tri manja kvadrata.

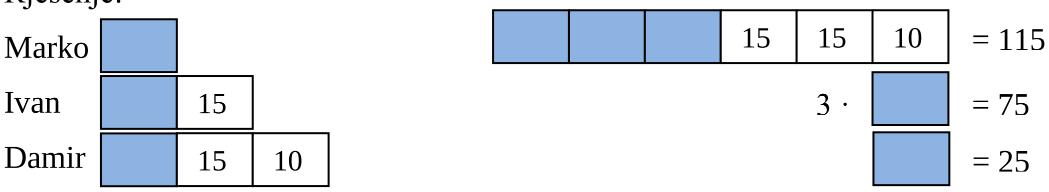
5.3.8. Grafičko-aritmetička metoda

Zanimljiva metoda rješavanja tekstualnih zadataka u nižim razredima osnovne škole u kojoj se matematički zadaci prikazuju uz pomoć sličica. Vrlo je korisna jer je način zaključivanja koji se razvija pri rješavanju zadataka tom metodom vrlo sličan analiziranju i zaključivanju koje provodimo Decartesovom metodom, tj. upotrebom jednadžbi.

Zadatak. Pri kupovini nekog dara Ivan je dao 15 kuna više od Marka, a 10 kuna manje od Damira. Koliko je dao svaki od njih ako je dar koštao 115kn?

Rješenje. Zadatak ćemo riješiti tako da Markov iznos označimo jednim pravokutnikom, Ivanov iznos označimo jednim pravokutnikom i još 15 kn u drugom pravokutniku, te Damirov iznos označimo jednako kao Ivanom te dodamo još 10 kn.

Rješenje:



Marko je dao 25 kn, Ivan 40kn, a Damir 50 kn u kupovini dara.

5.3.9. Metoda uzastopnih približavanja

Metoda se sastoji u nizu pokušaja da se dođe do rješenja postavljenog problema. U svakom od njih nastoji se ispraviti pogreška koja je nastala u prethodnom pokušaju. Pritom se općenito pogreška smanjuje i u svakom narednom pokušaju dolazi se sve bliže i bliže traženom rezultatu. Metoda se najčešće zorno prikazuje pomoću tablice u kojoj se unose pokušaji.

Zadatak. Za gradnju vodovodne mreže duge 270 m upotrjebljene su 82 ravne cijevi. Neke su cijevi duge 5m, ostale 3m. Koliko je upotrjebljeno kraćih, a koliko dužih cijevi?

Rješenje. U tablici 3. vidljiv je postupak rješavanja metodom pokušaja i uzastopnog približavanja konačnom rješenju zadatka.

Tablica 3. Prikaz rješavanja zadatka metodom uzastopnog približavanja

Broj cijevi od 3m	Ukupna duljina cijevi od 3m	Broj cijevi od 5m	Ukupna duljina cijevi od 3m	Duljina vodovoda u metrima
80	240	2	10	250
76	228	6	30	258
74	222	8	40	262
70	210	12	60	270

5.4. Problemski zadaci – otkrivanje darovitih učenika

Problemski zadaci mogu poslužiti kao način otkrivanja daroviti učenika. Uobičajena metoda za otkrivanje darovitih u Europi su matematička natjecanja na kojima se pojavljuju problemski zadaci. „Kroz matematička natjecanja mogu se iskristalizirati matematički daroviti učenici, no mnogo njih zbog skromnih dosega na natjecanjima, mogu svoj nastup pogrešno ocijeniti promašajem i izgubiti se bez pokušaja realizacije svojih potencijala“. Pavleković (2009. 36) Upravo zbog toga važno je domisliti prikladnije metode izlučivanja matematički darovite djece u populaciji i pristupe u vezi otkrivanja, edukacije i zadržavanja interesa matematički darovitih učenika. (Pavleković. 2009) Jedan od takvih pristupa je natjecanje Klokan bez granica koje za cilj ima popularizaciju matematike i podizanje razine opće matematičke pismenosti.

Pavleković (2009. 36) navodi da tragajući za matematičkim darovitim učenicima mlađe školske dobi, učitelja valja ohrabriti da skrene pogled i na one učenike koji nemaju visoku uspješnost u rješavanju analognih zadataka, ali znaju zablistati originalnim rješenjem, uočenim uzročno-posljedičnim odnosom, izvrsnom procjenom, a također kada uoči brze i točne reakcije u igrama koje djeca u pravilu ne doživljavaju kao matematiku.

„Matematičku nadarenost ne trebamo doživjeti kao konstantu – dar koji jest ili nije dan nekom učeniku, već kao potencijal koji je u većoj ili manjoj mjeri podložan razvoju i napredovanju.“ (Pavleković, 2009., 37)

Istraživanja koje je provela Astrid Heinze (2005) u okviru doktorskog rada odnosila su se na razlike u strategijama rješavanja problemskih zadataka između nadarenih učenika i prosječnih učenika. Istraživanje predstavlja strategije rješavanja problemskih zadatka i procese mišljenja matematički nadarenih učenika osnovne škole, s naglaskom na neuobičajene problemske zadatke riječima.

Istraživanje je pokazalo da se matematički nadareni osnovnoškolski učenici ističu svojom mogućnošću da sustavno i brzo rade, dobivajući pritom uvid u strukture matematičkog problema. Osim toga, takvi učenici se ističu velikom sposobnošću da riječima objasne svoja rješenja. Heinze smatra da bi suočavanje s zahtjevnim zadacima trebalo povećati učeničke interese i talente u matematici. Autorica je odabrala matematičke probleme koji su bili primjereni za otkrivanje matematičke nadarenosti kod učenika, posebno u usporedbi s ostalim učenicima.

Prema Kapnicku (1998) i Krutetskii (1976) koji govore o sposobnostima osnovnoškolske djece, matematička nadarenost kod djece osnovnoškolske dobi može se manifestirati kroz slijedeće kriterije:

- „prepoznavanje obrazaca i formalnih struktura,
- mogućnost prijenosa prepoznatih matematičkih struktura,
- reverzibilnost operacija i procesa, fleksibilnost mentalnih procesa,
- promjena prikaza problema,
- matematička osjetljivost, kreativnost i
- matematičko pamćenje." (Kapnick 1998., Krutetskii 1976. prema Heinze 2005.)

Heinze je proučavala dječje strategije rješavanja problemskih zadatka dok su radili na kombinatornim zadacima, zadatku sa slagalicom i zadatku u kojem su trebali zbrojiti uzastopne prirodne brojeve. Kombinatorni zadaci odnosili su se na kombiniranje dijelova kuće u različitim bojama te su djeca radila s konkretnim materijalima, a u drugom zadatku su morali ispisati kombinacije četveroznamenkastih brojeva od ponuđene 4 znamenke. Zadatak s dijelovima slagalice odnosio se na to da djeca odrede može li se riješiti postavljeni zadatak ili ga je nemoguće riješiti, tj. mogu li ponuđenim dijelovima slagalice prekriti zadanu slagalicu. Zadnji zadatak odnosio se na to da učenici odrede koliko ima zbrojeva uzastopnih prirodnih brojeva čiji zbroj nije veći od 25.

Istraživanje je pokazalo da u usporedbi s prosječnim učenicima osnovne škole, matematički nadareni učenici trebaju značajno manje vremena da riješe zadatak sa slagalicom i zadatak sa zbrojevima. Njihova procedura se bazira na logičkoj analizi te oni rješavaju kombinatorne zadatke i zadatke sa zbrojem značajno sustavnije. Neka djeca koriste zaključke do kojih su došli kako bi riješili kombinatorne zadatke aritmetičkim putem.

Heinze je svojim istraživanjem pokazala da se na popisu kriterija za matematički nadarene učenike treba dodati još jedna sposobnost, a to je sposobnost objašnjavanja svojih postupaka riječima. Heinze navodi da su objašnjenja nadarenih učenika odraz njihovog razumijevanja matematičkog zadatka i strategije rješavanja koju koriste. U usporedbi s prosječnim učenicima dokazano je da nadareni učenici češće daju kvalitetnije odgovore.

Ipak, kao što Heinze navodi, individualne sposobnosti matematički nadarenih učenika trebali bi također uzeti u obzir. Različiti kriteriji matematičke nadarenosti ne moraju biti u potpunosti iskorišteni. Ponekad, oni se pojavljuju individualno i zahtijevaju individualnu podršku. Jedan oblik matematičke nadarenosti može se pokazati kao sposobnost učenika da detaljno analiziraju zadatke i njihova rješenja. Predstavljeni problemski zadaci u ovom istraživanju nisu služili samo da potaknu matematički nadarene učenike, nego da ponude spoznaje i znanje o dječjoj sposobnosti prepoznavanja matematičkih struktura i odnosa.

5.5. Kombinatorni problemski zadaci

„Kombinatorika i diskretna matematika ili kraće rečeno, kombinatorika je matematička disciplina koja uglavnom proučava konačne skupove i strukture.“ (Veljan, 2001) Autor objašnjava da riječ kombinatorika dolazi od riječi kombinacija, od lat. combinare=slagati, a riječ diskretan, od lat. dicrenere =razlučiti,razlikovati koja u ovom kontekstu znači da objekte koje proučavamo možemo jasno i nedvojbeno razlikovati po nekom redoslijedu.

Prilikom rješavanja kombinatornih zadataka učenici zadatke rješavaju neposrednim iskustvom, manipuliraju predmetima iz svakodnevnog života pri čemu broj predmeta ne smije biti prevelik, tvore što veći broj brojeva koristeći zadane znamenke ili slova i slično.

Poučavanje rješavanja kombinatornih situacija doprinosi:

- razvijanju sposobnosti opažanja,
- razvijanju sposobnosti utvrđivanja relacija jednakosti ili nejednakosti,
- sposobnosti stvaranju reda iz nereda,
- izdvajanju jednakih uzoraka i utvrđivanja zakona.

Cotič i Felda (2007) istraživali su razine rješavanja kombinatornih zadataka te u svom istraživanju potvrdili četiri faze kroz koje prolaze učenici prilikom rješavanja takvih zadataka. Razine rješavanja kombinatorne situacije su:

1. Konkretna razina:
   a) postavljanje početne točke za problemsku situaciju,
   b) analiza situacije,
   c) realizacija aktivnosti,
2. Grafička razina:
   d) shematizacija aktivnosti (slikovna prezentacija, nesustavne figure),
   e) shematizacija aktivnosti koristeći sustavne putove (tablica, kombinatorno stablo, dijagram),
3. Simbolička razina:
   f) prezentacija aktivnosti u općenitijem obliku,
   g) generalizacija problema,
4. Upotreba razvijenog pojma u novoj situaciji (Cotič i Felda, 2007:61-62).

6. STRATEGIJE RJEŠAVANJA PROBLEMSKIH ZADATAKA PREMA ENGLISH

Strategije rješavanja problemskih zadataka koji se odnose na kombinatorne zadatke istraživala je Lyn English kod učenika u dobi od 7 do 12 godina. Učenici su dobili 6 problemskih zadataka koji uključuju oblačenje medvjedića u sve moguće kombinacije obojenih majica i hlača (dvodimenzionalno) ili majica, hlača i teniskog reketa (trodimenzionalno). Prva tri problema bila su dvodimenzionalna, dok su druga tri bila trodimenzionalna.

U provedenim istraživanjima došla je do zaključaka da učenici rješavaju problemske zadatke koristeći različite strategije rješavanja dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih kombinatornih zadataka. Strategije se međusobno razlikuju po pristupu rješavanja i sustavnosti. Prikaz strategija u obliku kombinatornog stabla vidljiv je na slikama 3. i 4.

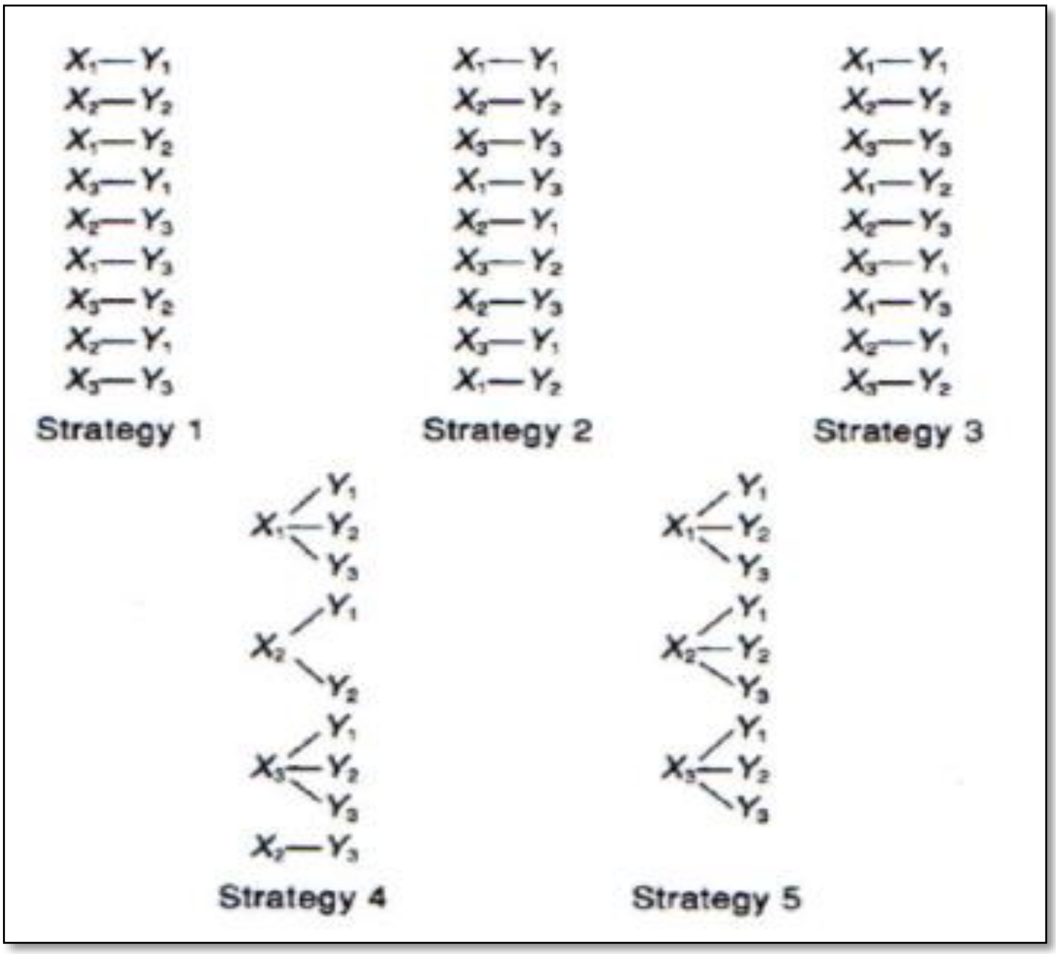
English (2007) je analizom dobivenih rezultata uočila strategije koje djeca koriste u rješavanju problemskih zadataka i to počevši od onih najjednostavnijih metoda pokušaja i pogrešaka, do složenih i sofisticiranih strategija.

6.1. Dvodimenzionalne strategije

Strategije koje su djeca koristila za rješavanje dvodimenzionalnih zadataka formirane su u ukupno pet postupno sve složenijih strategija. Na slici 3. prikazane su dvodimenzionalne strategije te su označene brojevima od 1 do 5. Oznake X_1, X_2 i X_3 odnose se na majice, a oznake Y_1, Y_2 i Y_3 odnose se na hlače.

Strategija 1

Strategija 1 jest strategija pokušaja i pogrešaka. Djeca odabiru predmete nasumičnim odabirom i odbijaju one koje smatraju neprimjerenim. Zanimljivost ove strategije kao i slijedećih dviju jest ta da djeca nevoljko uzimaju više od jedne stavke u razmatranje. Jedno moguće objašnjenje za ovo bi bilo da djeca različito interpretiraju riječ različito kao da znači različito u svim pogledima. U skladu s tim različitu odjevnu kombinaciju vide kao preporuku da naprave novu odjevnu kombinaciju potpuno različitu od prijašnje. Moguće je da djeca izbjegavaju ponavljati odabir istih predmeta zbog toga što to vide kao suprotnost zadatku.



Slika 3. Dvodimenzionalne strategije prema English (2007.,145)

Strategije 2 i 3

Strategije 2 i 3 – efikasnije od prethodne metode pokušaja i pogrešaka, ali ne efikasnije od strategija 4 i 5. Svojstvo po kojemu se razlikuju ove dvije strategije jest pojavljivanje uzorka u odabiru stavki. Ovaj uzorak je stvoren kako bi došao do rješenja i uobičajeno je ciklične ili alternativne prirode (crveni, zeleni, plavi, crveni, zeleni, plavi…). U strategiji 2 u jednom trenutku tijekom rješavanja problema, uzorak je izgubljen ili povremeno promijenjen. Kada uzorak više ne može proizvesti tražene kombinacije, djeca se vraćaju na strategiju pokušaja i pogrešaka. U strategiji 3 ciklični uzorak se koristi kod stvaranja svih traženih kombinacija, ali na samo jednom dijelu, npr. samo kod odabira majica.

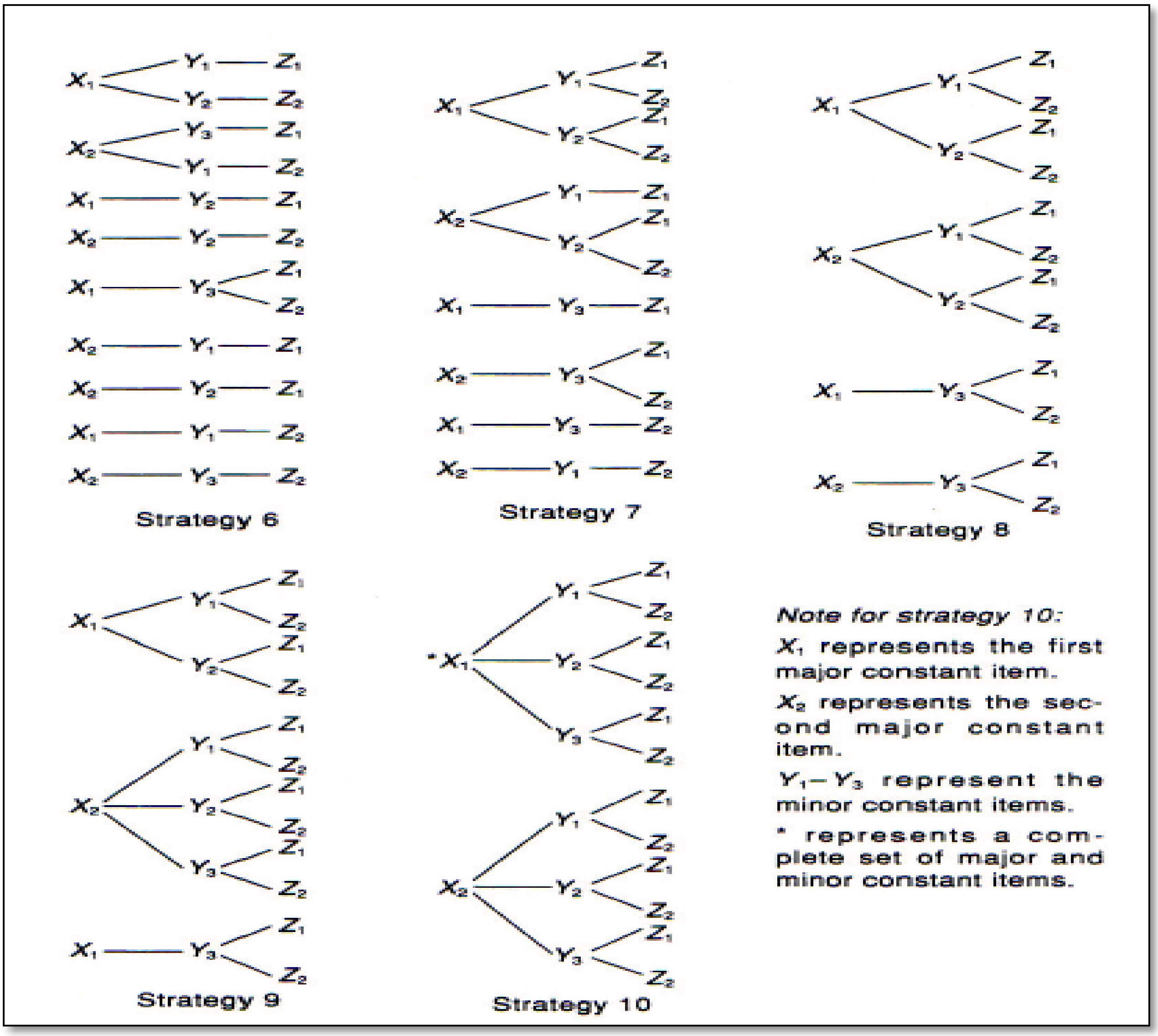
Strategije 4 i 5

Strategije 4 i 5 su najefikasnije dvodimenzionalne strategije, zahvaljujući prisutnosti odometar uzorka u odabiru stavki. Ovaj uzorak nazvan odometar, prema sličnosti s brojačem kilometara u vozilu (Scardamalia, 1977., prema English, 2007), sadrži cikličnu strukturu iz strategije 3, ali i uključuje novu značajku, konstantni ili središnji predmet. Ovaj predmet koristi se iznova sve dok se ne formiraju sve moguće kombinacije s tim predmetom. Kada se formiraju sve moguće kombinacije, prelazi se na novi konstantni predmet i proces se ponavlja (na primjer crvena majica-plave hlače, crvena majica- žute hlače, crvena majica-zelene hlače, plava majica – plave hlače, plava majica – žute hlače, plava majica – zelene hlače). Strategija 4 ima slabosti u odnosu na strategiju 5 u kojoj je vidljiva konzistentna i potpuna primjena uzorka odometra. Strategija 4 sadrži nedostatke poput neiscrpne upotrebe konstantne stavke koju učenici naknadno na kraju isprave, previše puta koriste istu kombinaciju te sami uvide pogreške i isprave ih.

6.2. Trodimenzionalne strategije

Ključna značajka trodimenzionalnih strategija je u dječjoj sposobnosti da istovremeno rade sa dva stalna predmeta, što je u suprotnosti s jednom konstantom koja je korištena u dvodimenzionalnim problemima. Radi lakšeg snalaženja, stalni predmeti su označeni kao glavni i sporedni. Glavni stalni predmeti se mijenjaju rjeđe. Najefikasnija metoda rješavanja trodimenzionalnih problema uključuje mijenjanje glavnih i sporednih konstantnih predmeta najmanji mogući broj puta. Ekspertna trodimenzionalna strategija iskorištava sve nizove glavnih i sporednih predmeta. Tako je X1 sustavno spojen sa svakim od Y1, Y2 i Y3. svaki od njih je spojen sa svakim od Z1 i Z2. Ovaj proces je ponovljen s X2.

Većina djece obuhvaćena istraživanjem mogla je jasno objasniti strategije koje su koristili u rješavanju trodimenzionalnih problema. Na slici 4. prikazane su trodimenzionalne strategije u obliku kombinatornog stabla.



Slika 4. Trodimenzionalne strategije prema English (2007.,147)

Strategija 6

Ova početna trodimenzionalna strategija može se usporediti s postupkom pokušaja i pogrešaka kod dvodimenzionalnih strategija. Najmanje uspješna strategija od svih trodimenzionalnih strategija i sklona je pogrešci. Koristeći ovu strategiju djeca iskoriste manje od polovice sporednih konstantnih predmeta. Ne iskoriste niti jedan potpun niz glavnih i sporednih konstantnih predmeta.

Strategija 7

Uspješnija strategija od strategije 6 u tome što djeca iskoriste polovinu ili više stalnih sporednih predmeta. Ova strategija, u odnosu na učinkovitost, paralelna je strategiji 2 dvodimenzionalnih strategija u kojoj djeca prihvaćaju uzorak u odabiru predmeta, ali ne uspijevaju primijeniti ga do kraja. Dječja objašnjenja ove strategije odnose se na korištenje sustavnih postupaka i pristupa pokušaja i pogrešaka.

Strategija 8

Djeca koja koriste ovu strategiju iskoristili su sve sporedne konstantne predmete kao što se vidi na slici 3. Ipak oni ne uspijevaju potpuno iskoristiti nizove glavnih i sporednih stalnih predmeta. Ovaj postupak prema uspješnosti usporediv je strategiji 3 u kojoj djeca prate stalan ciklični uzorak u odabiru predmeta, ali ne koriste stalan predmet. Promatrani napredak u uspješnosti ove strategije je očit u dječjim objašnjenjima kako su formirali parove odjevnih kombinacija i izmjenjivali teniske rekete.

Strategija 9 i 10

Posebnost strategije 9 i 10 je u korištenju svih glavnih i sporednih stalnih predmeta. Djeca koristeći strategiju 9 iskoriste samo jedan niz glavnih i sporednih stalnih predmeta dok djeca koristeći strategiju 10 iskoriste oba niza glavnih i sporednih stalnih predmeta. Ove zadnje dvije strategije su najefikasnije i prema uspješnosti odgovaraju postupcima odometra kod dvodimenzionalnih strategija 4 i 5.

Prema rezultatima istraživanja, dvije značajne stvari su vidljive, raznovrsnost dječjih strategija rješavanja problema i dječji potencijal za samostalno učenje u diskretnoj matematičkoj domeni. Iako je malen postotak djece obuhvaćene istraživanjem, koje je provela English, primjenjivao ekspertne strategije u početku, većina je koristila manje uspješnije procedure u rješavanju prvog problema. S iskustvom u rješavanju dvodimenzionalnih problema , djeca su precizirala svoje strategije.

Unatoč različitim razinama sofisticiranosti, sve dječje strategije imale su potencijal rješavanja problema. Čak i sa neučinkovitim postupcima, značajan broj djece je bio u mogućnosti riješiti probleme pažljivim promatranjem svojih aktivnosti i nužnim promjenama kada bi napravili dvostruke ili ispustili kombinacije. Djeca koja su koristila napredne strategije su istovremeno radila sa dva stalna predmeta, zahvaljujući iskustvu sa jednim stalnim predmetom u dvodimenzionalnim problemima. (English, 2007)

7. ISTRAŽIVAČKI DIO

Potaknuta istraživanjima koje su provele English (1993, 2007) Heinze (2005) u kojemu su istraživale strategije rješavanja dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih problema kod učenika odlučila sam provesti istraživački dio svog diplomskog rada u kojem sam istražila strategije rješavanja problemskih zadatka i procese mišljenja učenika četvrtih razreda dviju osnovnih škola. Strategije rješavanja zadataka razvrstala sam prema Englishovim strategijama rješavanja dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih problema.

U okviru matematičkih procesa Prikazivanje i komunikacija, Povezivanje, Logičko mišljenje i argumentiranje te Rješavanje problema i modeliranje opisani su obrazovni ishodi koji se odnose na to što bi učenici trebali znati na kraju četvrte godine školovanja. U skladu s tim, možemo vidjeti da će učenici između ostalog :

„... izraziti ideje i rezultate govornim i matematičkim jezikom primjerenim dobi, i to u usmenom, pisanom i vizualnom obliku, uspostaviti veze između usvojenih matematičkih ideja, pojmova, prikaza i postupaka“ (Prikazivanje i komunikacija),

„povezati matematiku s vlastitim iskustvom, svakodnevnim životom i drugim odgojno-obrazovnim područjima“ (Povezivanje), „postavljati matematici svojstvena pitanja (Koliko ima...? Što je poznato? Što trebamo odrediti? Kako ćemo odrediti? Zbog čega? Ima li rješenje smisla? Postoji li više rješenja? i dr), te stvarati i istraživati pretpostavke o matematičkim objektima, pravilnostima i odnosima, obrazložiti odabir matematičkih postupaka i utvrditi smislenost dobivenoga rezultata“(Logičko mišljenje i argumentiranje),

„postaviti i analizirati jednostavniji problem, isplanirati njegovo rješavanje odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka, riješiti ga, te interpretirati i vrednovati rješenje i postupak“(Rješavanje problema i modeliranje)[3].

Prema ishodima učenja u Nacionalnom okvirnom kurikulumu možemo zaključiti da bi učenici na kraju odgojno obrazovnog ciklusa trebali moći riješiti zadane zadatke, postaviti i analizirati probleme te ih interpretirati ih govornim i matematičkim jezikom primjerenim dobi.

[3] Nacionalni okvirni kurikulum. Preuzeto s http://public.mzos.hr/Default.aspx?sec=2685 15.5.2015.

8. METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA

8.1. Ciljevi i hipoteze istraživanja

Ciljevi istraživanja su:

- istražiti koje strategije učenici koriste prilikom rješavanja kombinatornih problemskih zadataka,
- ispitati ima li učenika koji pokazuju poseban interes za učenjem matematike i darovitih učenika, koje strategije rješavanja problemskih zadataka koriste te jesu li sposobni riječima objasniti i potkrijepiti svoje postupke.

U skladu s postavljenim ciljevima postavila sam hipoteze:

- Učenici će koristiti različite strategija, od najjednostavnijih do najsloženijih.
- Učenici koji pokazuju poseban interes za učenjem matematike zadatke će riješiti koristeći najviše sustavne strategije rješavanja problema te će moći objasniti svoje postupke.

8.2. Struktura uzorka

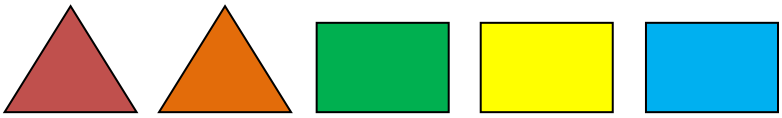
Istraživanje sam provela u Osnovnoj školi „Ivan Mažuranić“ u Sibinju i područnoj školi Osnovnoj školi „Đuro Pilar“, područnoj školi na Koloniji, Slavonski Brod. Prije provođenja istraživanja prikupila sam suglasnost roditelja za sudjelovanje učenika u istraživanju. Neki roditelji nisu pristali na sudjelovanje u istraživanju te radove tih učenika nisam uvrstila u istraživanje niti ih analizirala. U istraživanju je sudjelovalo 60 učenika iz ukupno 3 četvrta razreda. Prije provođenja istraživanja učiteljice su popunile anketu (Prilog 1) kojom sam saznala podatke potrebne za analizu radova učenika koji su daroviti ili pokazuju poseban interes za nastavom matematike.

8.3. Materijali i postupak istraživanja

Istraživanje u sva tri razreda sam provela na isti način. Učenici su trebali riješiti tri kombinatorna problemska zadatka.

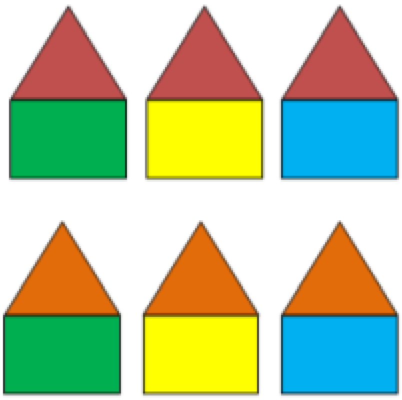
Prvi zadatak bio je dvodimenzionalan u kojem su učenici trebali složiti kućice od tri različito obojena pravokutnika dva različito obojena trokuta.

Zadatak 1. *Svatko od vas dobio je geometrijske likove; dva različito obojena trokuta (crveni i narančasti) i tri različito obojena pravokutnika (zeleni, žuti i plavi). Koliko različitih kućica možete složiti ako se svaka kućica sastoji od jednog trokuta i jednog pravokutnika?*



Rješenje:

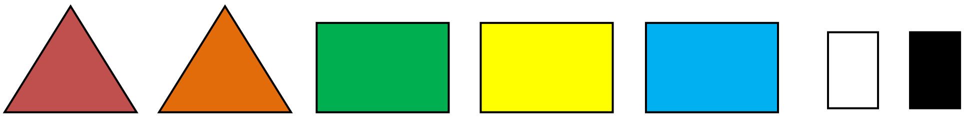
Može se složiti 6 različitih kućica kao što vidimo na slici 5.



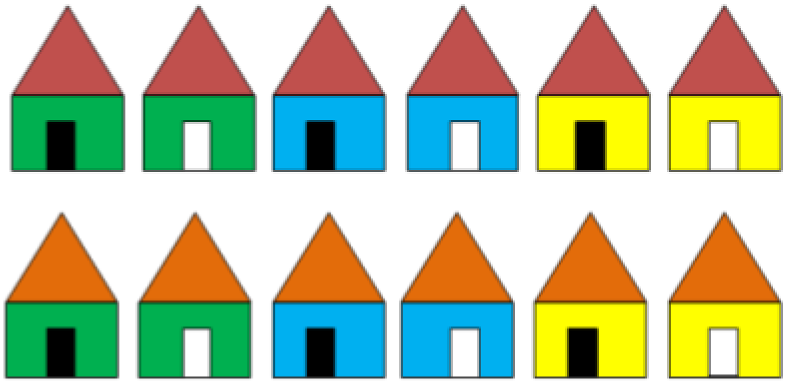
Slika 5. Rješenje 1. zadatka

Drugi zadatak je bio složeniji, sadržavao je trodimenzionalni problem u kojem su učenici trebali složiti kuće tako da pročelje, krov i vrata kuće budu različitih boja. Svaki zadatak učenici su dobili napisan na papir te uz prazan papir dobili su potrebne materijale, pravokutnike i trokute u različitim bojama te ljepilo. Učenici su dobili više izrezanih materijala od potrebnog broja kako brojem pravokutnika i trokuta ne bih utjecala i usmjeravala ih na točan broj kućica.

Zadatak 2. *Kuća se sastoji od krova, pročelja i vrata. Trebate sagraditi kuću tako da svaki dio kuće bude obojen drugom bojom. Za pročelje imate 3 boje: zelenu, žutu i plavu. Vrata mogu biti bijele ili crne boje, a krov crveni ili smeđi. Koliko ćete kuća sagraditi tako da pročelje,* *krov i vrata budu različito obojeni?*



Rješenje: Moguće je sagraditi 12 kuća kao što vidimo na slici 6.



Slika 6. Rješenje 2. Zadatka

Treći zadatak označavao je prijelaz s rada na konkretnim materijalima na računanje i ispisivanje kombinacija. U trećem zadatku morali su kombinirati četiri znamenke za šifru na lokotu. Učenici su imali dovoljno vremena za samostalno rješavanje zadataka te su iste predali kada su smatrali da su riješili zadatke i da je to njihov konačan odgovor. Odgovore su učenici pisali ispod ispisanih kombinacija, a neki od njih su i snimljeni.

Zadatak 3. *Marko je kupio bicikl i uz njega dobio lokot za zaključavanje. Na njemu se nalaze znamenke 0, 1, 2 i 3. Na koliko različitih načina Marko može kombinirati znamenke 0, 1, 2 i 3 za šifru na lokotu, a da se pritom znamenke ne ponavljaju? (šifra ne može imati dva ista znamenke).*

Rješenje: Marko može kombinirati brojeve na 24 načina kao što vidimo na slici 7.

0 1 2 3	1 0 2 3	2 0 1 3	3 0 1 2
0 1 3 2	1 0 3 2	2 0 3 1	3 0 2 1
0 2 1 3	1 2 0 3	2 1 0 3	3 1 0 2
0 2 3 1	1 2 3 0	2 1 3 0	3 1 2 0
0 3 1 2	1 3 2 0	2 3 0 1	3 2 0 1
0 3 2 1	1 3 0 2	2 3 1 0	3 2 1 0

Slika 7. Sustavno riješen 3. zadatak

9. REZULTATI I RASPRAVA

9.1.Rezultati uspješnosti učenika u svakom od zadataka

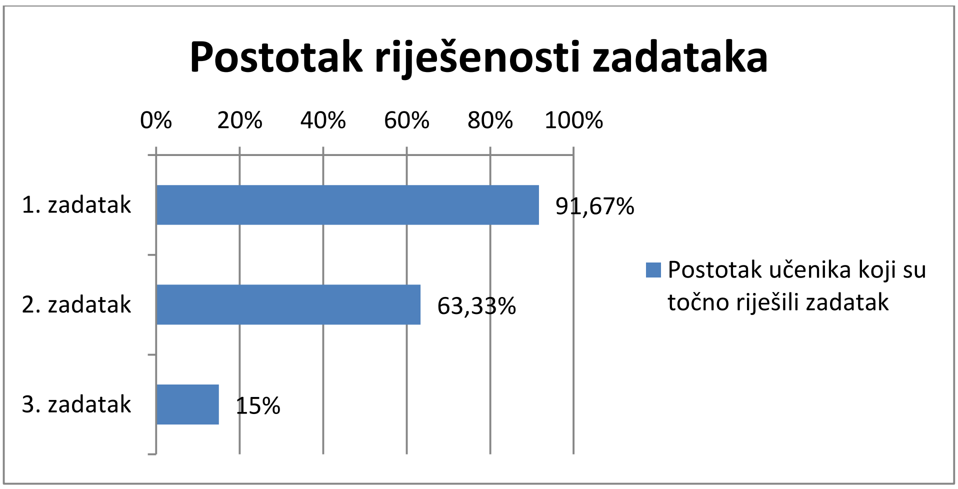
U tablici 4. prikazan je broj učenika koji su točno riješili pojedini zadatak. U prvom zadatku u kojem je bio postavljen dvodimenzionalni problem učenici su mogli pronaći najviše 6 različitih kombinacija kuća, u drugom zadatku s trodimenzionalnim problemom rješenje različitih kombinacija boja vrata, krova i pročelja kuće bilo je 12, a u 3. zadatku učenici su mogli pronaći 24 različite kombinacije brojeva.

Tablica 4. Broj učenika koji su točno riješili pojedini zadatak

Zadaci	Broj učenika koji je točno riješio zadatak•	Ukupan broj učenika	Postotak učenika koji su točno riješili zadatke
1.zadatak	55	60	91,67%
2. zadatak	38	60	63,33%
3. zadatak	9	60	15%

•Za potrebe ove analize pod pojmom točno rješenje zadatka sam prihvaćala odgovore u kojima je učenik zalijepio, odnosno napisao sve moguće kombinacije u pojedinom zadatku.

U tablici 4 i grafikonu 1 vidljivo je da je najveći broj učenika točno riješilo prvi i najjednostavniji zadatak s dvodimenzionalnim problemom, dok je trodimenzionalni problem uspješno riješilo 63,33% ispitanih učenika, a četverodimenzionalni njih samo 15%.



Grafikon 1. Postotak učenika koji su točno riješili zadatke

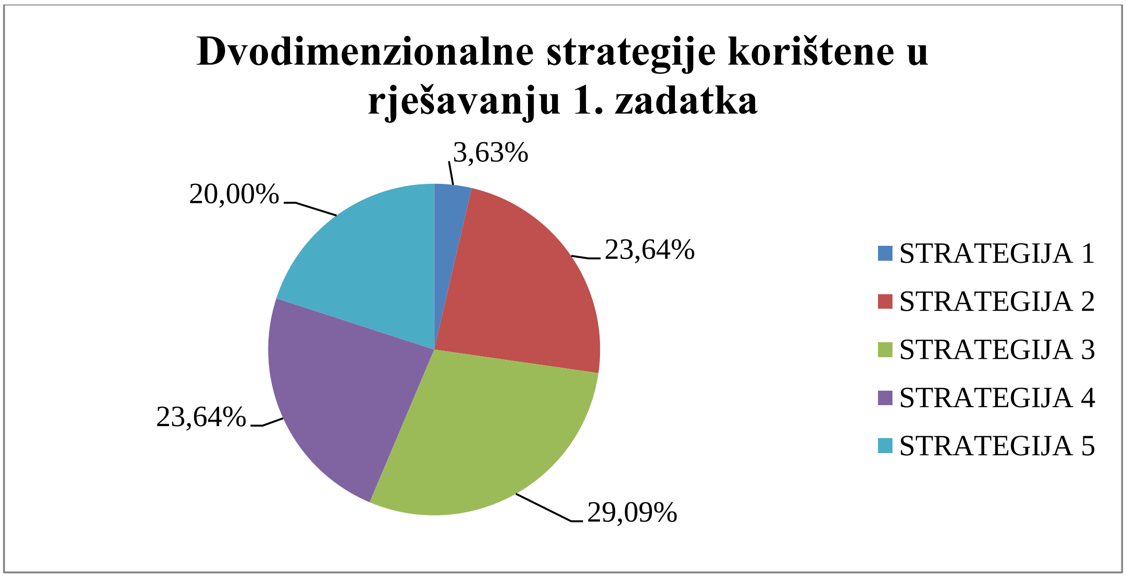
9.2. Učestalost korištenja dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih strategija

Prema početnoj pretpostavci kojom sam željela potvrditi da učenici koriste različite strategije, od najjednostavnijih do najsloženijih, analizirala sam strategije koje su učenici koristili za rješavanje dvodimenzionalnog (1.zadatak) i trodimenzionalnog problema (2. zadatak). Analizirala sam one učeničke radove koji su napisali i polijepili sve tražene kombinacije kućica te sam njihova rješenja razvrstala prema strategijama od 1 do 10.

Iz tablice 5 i grafikona 2. vidljivo je da učenici u rješavanju dvodimenzionalnog problema koriste različite strategije, od najjednostavnijih strategija 1 i 2, do najsustavnijih strategija 4 i 5. Najčešće korištena strategija je strategija broj 3 koju je koristilo 29,09% ispitanih učenika, a najmanje korištena strategija je strategija 1 koju je koristilo 2 od ukupno 55 učenika koji su točno riješili 1. zadatak.

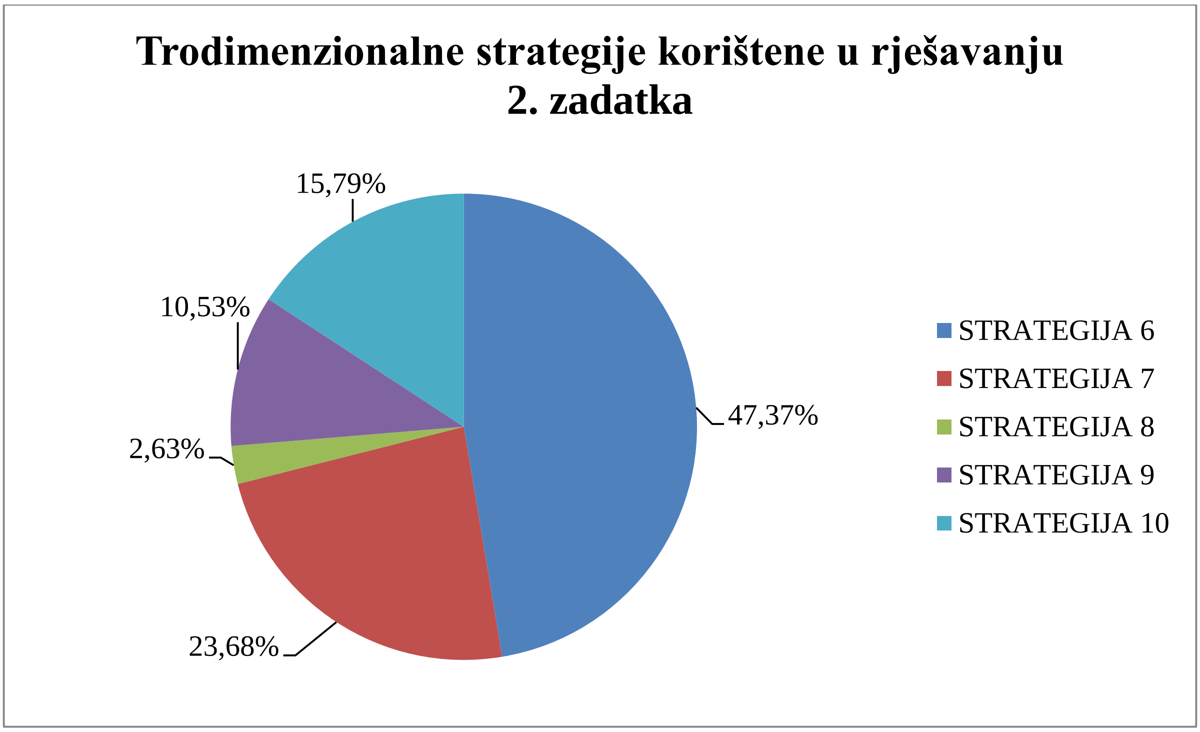
Tablica 5. Učestalost korištenja dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih strategija

Dvodimenzionalne strategije	Broj učenika	%	Trodimenzionalne strategije	Broj učenika	%
STRATEGIJA 1	2	3,63	STRATEGIJA 6	18	47,37
STRATEGIJA 2	13	23,64	STRATEGIJA 7	9	23,68
STRATEGIJA 3	16	29,09	STRATEGIJA 8	1	2,63
STRATEGIJA 4	13	23,64	STRATEGIJA 9	4	10,51
STRATEGIJA 5	11	20,00	STRATEGIJA 10	6	15,79



Grafikon 2. Dvodimenzionalne strategije korištene u rješavanju 1. zadatka (u %)

U tablici 5. i grafikonu 3. vidimo da se raznovrsnost upotrebe strategija smanjila u 2. zadatku s trodimenzionalnim problemom te da većina učenika koristi najjednostavniju strategiju rješavanja trodimenzionalnih problema, strategiju 6, koja je istovjetna strategiji 1 kod dvodimenzionalnih zadataka. U ovoj strategiji koristi se metoda pokušaja i pogrešaka i vrlo često učenici ne iskoriste niti polovinu sporednih predmeta. Strategiju 6 koristi 18 od 38 učenika koji su točno riješili drugi zadatak i pronašli sve kombinacije, što čini 47,37% učenika. Sljedeća strategija koju su učenici najčešće koristili je strategija 7, u kojoj prema English, iskoriste više od polovine stalnih sporednih predmeta, a zasniva se na sustavnom pristupu i pristupu pokušaja i pogrešaka (English, 2007). Zanimljiv je podatak da čak 15, 79% učenika koristi najsofisticiraniju strategiju rješavanja problemskih zadataka, strategiju 10, koja se odlikuje iscrpljivanjem svih mogućnosti s dva stalna predmeta.

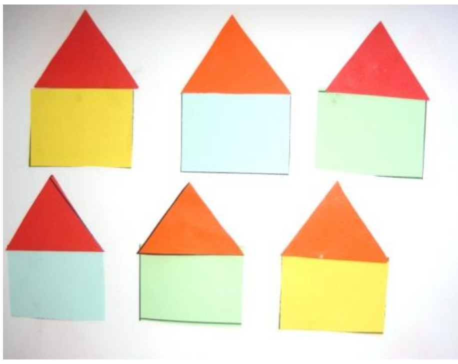


Grafikon 3. Trodimenzionalne strategije korištene u rješavanju 2. zadatka (u %)

9.2.1. Primjeri dvodimenzionalnih strategija koje su koristili učenici

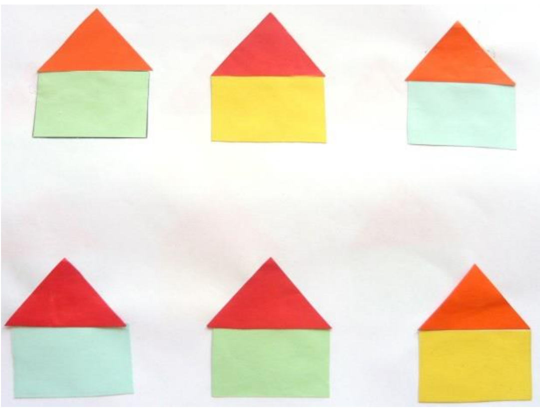
Učenici su koristili različite strategije rješavanja 1. zadatka, kao što je prikazano u tablici 5. i grafikonu 2. U nastavku ću prikazati neke od njihovih uradaka koji odgovaraju pojedinim strategijama.

Na slici 8. učenik je koristio strategiju 1, strategiju pokušaja i pogrešaka. Najprije je spojio žuti pravokutnik s crvenim krovom, plavi pravokutnik s narančastim krovom, zeleni pravokutnik s crvenim krovom, zatim je dodao kućice koje su mu nedostajale, plavi pravokutnik s crvenim krovom, zeleni pravokutnik s narančastim krovom i žuti pravokutnik s narančastim krovom.

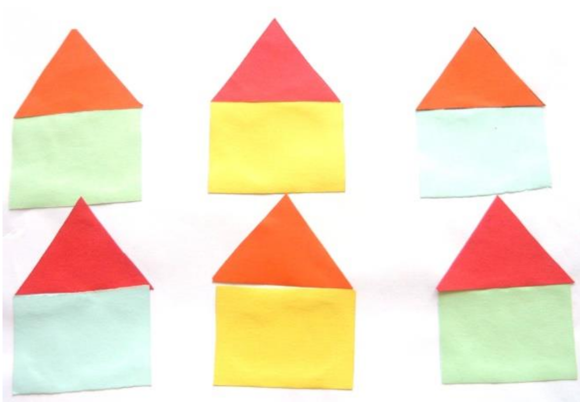


Slika 8. Primjer zadatka riješenog strategijom 1

Na slici 9. možemo vidjeti rješenje u kojem je učenik koristio strategiju 2 za koju je karakteristično ciklično ponavljanje jednog dijela kombinacija, ali se taj uzorak gubi. Na ovom primjeru, učenik je ponavljao boju krova, narančasta, crvena, narančasta, crvena narančasta, zatim je zamijenio taj uzorak u uzorak crvena, narančasta, a boje pravokutnika mijenjao promatranjem i pokušajima.



Slika 9. Primjer zadatka riješenog strategijom 2

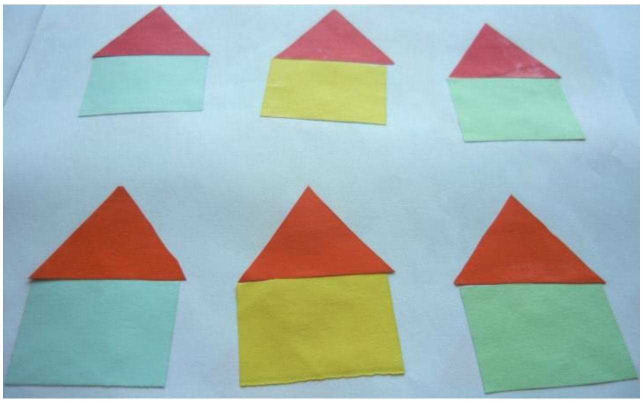


Slika 10. Prikaz zadatka riješenog strategijom 3

Na slici 10. vidljiv je ciklični uzorak strategije 3 u kojoj je učenica ponavljala boju trokuta (crveni, narančasti, crveni narančasti, crveni narančasti). Strategija je uspješnija u odnosu na strategiju 2 u kojoj učenici nisu imali cikličan uzorak.

Na slici 11. korištena je strategija 4 u kojoj je upotrijebljen jedan stalni predmet, u ovom slučaju to je boja krova, a boje pravokutnika su nesustavno mijenjane (narančasti krov - plavi, zeleni, žuti pravokutnik, crveni krov - žuti, plavi, zeleni pravokutnik).

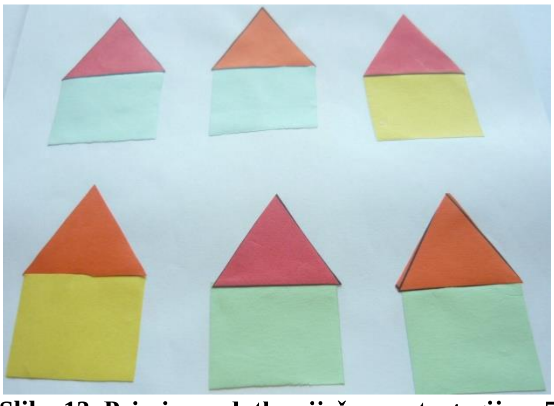
Slika 11. Prikaz zadatka riješenog strategijom 4



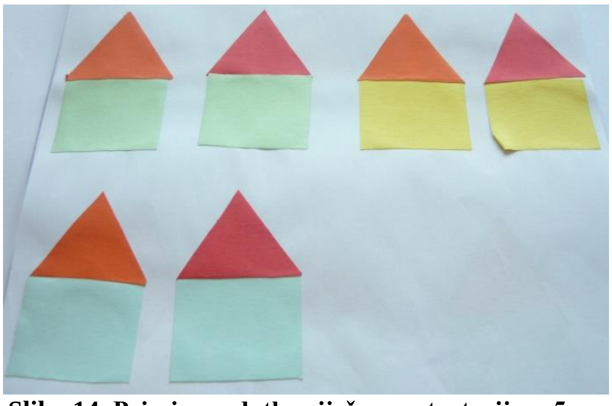
Slika 12. Primjer zadatka riješenog strategijom 5

Na slikama 12., 13. i 14. vidljiva je upotreba najsustavnije strategije rješavanja dvodimenzionalnih problema koju karakterizira dosljedna i potpuna primjena odometar uzorka u stvaranju kombinacija. Učenik na slici 12. je kao stalni predmet izabrao boju trokuta, odnosno krova, a boje pravokutnika je mijenjao sustavno: plava, žuta, zelena, plava, žuta, zelena.

Na slikama 13. i 14. vidimo primjere zadataka riješene također strategijom 5, ali je u ovom slučaju stalan predmet boja pravokutnika, pa su tako učenici najprije napravili kombinaciju plavog pravokutnika sa crvenim i narančastim krovom, zatim žutog pravokutnika s crvenim i narančastim krovom i na kraju zelenog pravokutnika s crvenim i narančastim krovom.



Slika 13. Primjer zadatka riješenog strategijom 5



Slika 14. Primjer zadatka riješenog strategijom 5

Pretpostavila sam da će učenici koji 1.zadatak riješe sustavnom strategijom 5 biti sposobni objasniti riječima svoje postupke, što sam potvrdila u većini slučajeva. Neke njihove odgovore i objašnjenja navodim u nastavku.

Učenik Emanuel dao je objašnjenje za strategiju na slici 11.: *„ Prvo sam zalijepio crvene trokute, a onda narančaste i mijenjao boju pravokutnika“*

Učenik Karlo koji je složio kombinaciju prikazanu na slici 12. dao je sljedeći odgovor: *„Napravio sam dvije plave, pa sam izračunao da će biti i 2 zelene i 2 žute i to je 6.“*

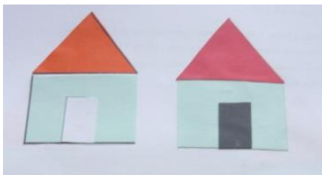
9.2.2. Primjeri trodimenzionalnih strategija koje su koristili učenici

Nakon zadatka s dvodimenzionalnim problemom, učenici su rješavali zadatak s trodimenzionalnim problemom u kojem su uz trokut i pravokutnik koji su predstavljali pročelje i krov kuće, dobili još jedan pravokutnik u dvije boje koji je označavao vrata.

Na slici 15. vidimo najjednostavniju strategiju rješavanja trodimenzionalnih problema, strategiju 6. Učenik je lijepio pravokutnike i trokute različitih boja, a potom dodavao vrata u različitim bojama. Na slici možemo vidjeti kako nema sustavnog kombiniranja, niti stalnih predmeta što nam ukazuje na to da je učenik rješavao metodom pokušaja i pogrešaka tražeći kombinacije koje je ispustio ili popravljajući kombinacije koje je krivo napravio.

Slika 15. Primjer zadatka riješenog strategijom 6

Učenik je na slikama 16. i 17. koristio strategiju 7 koja se prema English razlikuje od strategije 6 u tome što učenik koristi više od polovine sporednih predmeta. Učenik koristi strategiju pokušaja i pogrešaka te pažljivim promatranjem pronalazi kombinacije kuća koje mu nedostaju, ali ih ne prikazuje sustavno i određenim redoslijedom., kao što je to slučaj na slikama 18. i 19. gdje je učenik koristio strategiju 8.



Slika 16. Primjer zadatka riješen strategijom 7

Slika 17. Pozadina slike 16

Na slikama 18. i 19. vidimo da učenik u početku nastavlja slagati kombinacije kuća pristupom pokušaja i pogrešaka, a tek pri kraju uzima dva stalna predmeta, crveni krov s crnim vratima i različitom bojom zida, i narančasti krov s bijelim vratima.

Slika 18. Primjer zadatka riješenog strategijom 8

Slika 19. Pozadina slike 18

Slika 20. Primjer zadatka riješenog strategijom 9

Prema English djeca koristeći strategiju 9 iskoriste samo jedan niz glavnih i sporednih stalnih predmeta dok koristeći strategiju 10 iskoriste oba niza glavnih i sporednih stalnih predmeta. Na slici 20., gdje je primjer strategije 9, vidljivo je da je učenik koristio kao stalne predmete boju pročelja kao glavni stalni predmet i boju krova kao sporedni stalni predmet, a vrata su izmjenjivanja nesustavno. Učenica je objasnila svoje rezultate: *„U tri reda sam zalijepila četiri kuće u jednoj boji i mijenjala sam boje vrata i krovova*."

Na slikama 21. i 22. učenici su koristili najsustavniju strategiju, korištenjem oba niza glavnih i sporednih stalnih predmeta. Učenica je dala objašnjenje za primjer na slici 22.: *„Prvo sam u jedan red zalijepila zelene pravokutnike, u drugi red žute, a u treći red plave pravokutnike i na njima mijenjala krovove i vrata."*

Slika 21. Primjer zadatka riješenog strategijom 10

Slika 22. Primjer zadatka riješenog strategijom 10

9.3. Rezultati uspješnosti rješavanja 3. zadatka

Učenici su u trećem zadatku, nakon rješavanja prva dva zadatka uz pomoć konkretnih materijala, trebali ispisati sve moguće četveroznamenkaste kombinacije od brojeva 0, 1, 2 i 3. Ukupan broj mogućih različitih kombinacija brojeva 0, 1, 2 i 3 jest 24. Učenici su rješenja ispisivali većinom nesustavno, metodom pokušaja i pogrešaka te analiziranjem i promatranjem ponavlja li se napisana kombinacija u prethodno napisanim kombinacijama.

Učenici su odgovarali rečenicom koliko ima mogućih kombinacija, no detaljnijom analizom i pregledavanjem njihovih kombinacija uočila sam da njihovi odgovori ne pokazuju stvarni broj točnih kombinacija, a najčešće pogreške su bile ponavljanje istih kombinacija i korištenje istih znamenaka u jednoj kombinaciji. Pregledavanjem kombinacija svakog učenika svrstala sam njihova rješenja s obzirom na broj točno napisanih kombinacija, kao što je prikazano u tablici 6.

Tablica 6. Uspješnost rješavanja 3.zadatka

Broj točnih kombinacija	Broj učenika i učenica	%
<12	6	10,00%
12	0	0,00%
13	2	3,33%
14	2	3,33%
15	4	6,67%
16	1	1,67%
17	4	6,67%
18	4	6,67%
19	8	13,33%
20	6	10,00%
21	4	6,67%
22	2	3,33%
23	8	13,33%
24	9	15,00%
Ukupno:	60	

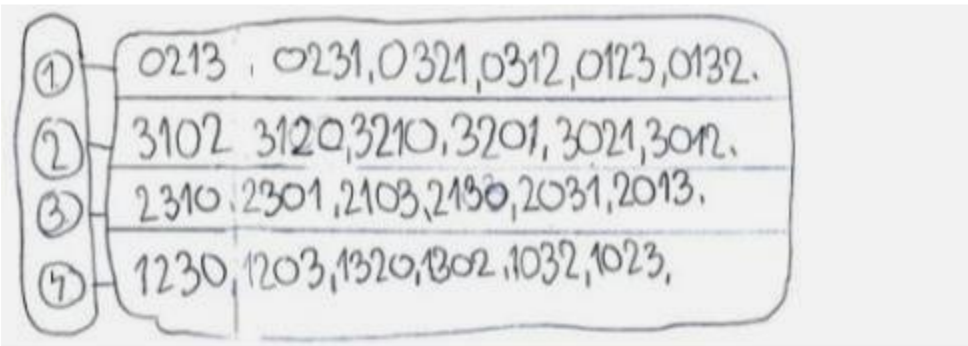
Grafikon 4. i tablica 6. pokazuju nam postotak učenika koji su napisali određeni broj kombinacija. Tako možemo vidjeti da je 10% učenika napisalo manje od polovine mogućih kombinacija, 13, 33% učenika napisalo je 19 točnih kombinacija, a najviše kombinacija 23 i

24 napisalo je ukupno 28,33% učenika. Od ukupnog broja ispitanih učenika njih 15% (9 učenika) je pronašlo svih 24 kombinacije i pritom koristili sustavnu strategiju u kojoj su imali stalnu prvu znamenku, a ostale znamenke mijenjali. Učenici koji su bili blizu maksimalnom mogućem broju kombinacija i napisali ukupno 23 točne kombinacije zadatak su rješavali uglavnom nesustavnim ispisivanjem i promatranjem, te su pritom pravili greške ponavljanja kombinacija.

Grafikon 4. Postotak učenika s obzirom na broj točnih kombinacija

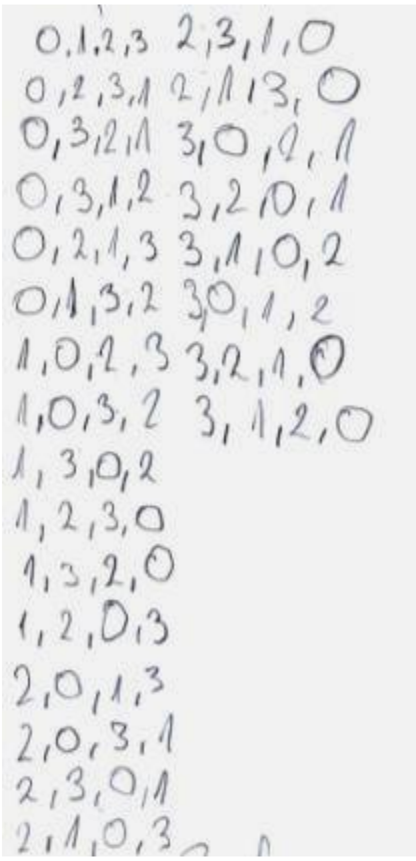
Učenici koji su zadatke riješili sustavnom metodom s jednom stalnom znamenkom dali su objašnjenja svojih postupaka:

Na slici 23. vidimo kako je učenica rješenja sustavno ispisivala sa stalnom prvom znamenkom. Učenica Veronika je napisala *„Prvo sam išla sa nulom, pa s 3, 2, 1 i tako sam dobila 24 broja.“*



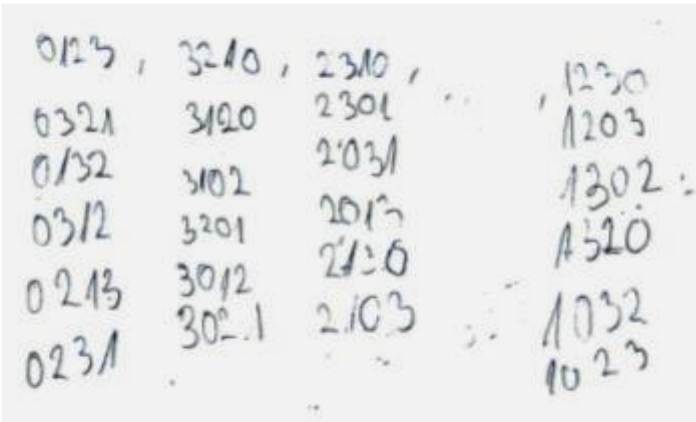
Slika 23. Primjer sustavnog rješenja 3. zadatka

Učenik Luka je uočio da će broj kombinacija s jednom stalnom znamenkom na početku kombinacije biti 6 i tako izračunao da će ukupan broj kombinacija biti 24 te dao objašnjenje: *„Prvi broj sam stavio isti, a druge sam mijenjao. Šest brojeva puta četiri primjera. Šest puta četiri je 24.“*(vidi sliku 24.)



Slika 24. Primjer sustavnog rješenja 3. zadatka

Učenik Matija je napisao: *„Do toga sam došao da sam mijenjao brojeve. Ukupno ih ima 24. Sa jednim brojem na prvom mjestu ih ima 6.“*(vidi sliku 25.)



Slika 25. Primjer sustavnog rješenja 3. zadatka

9.4. Usporedba rezultata prema spolu

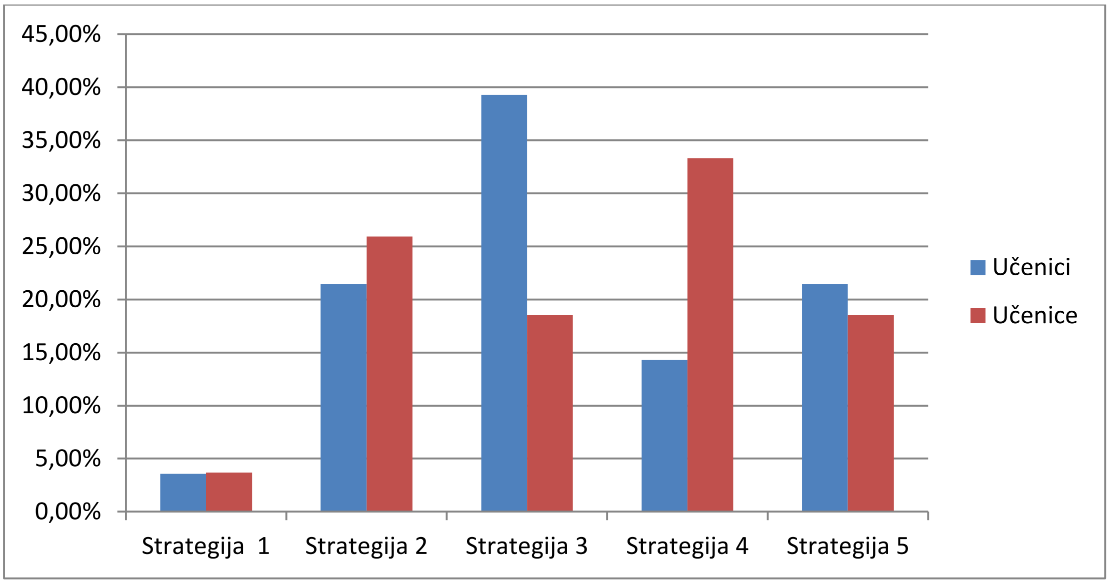
Razlike u postignuću učenika prema spolu ispitivane su i s aspekta rješavanja problemskih zadataka. Klasnić u svom radu navodi da longitudinalnom studijom provedenom na 159 dvanaestogodišnjaka nisu pronađene razlike po spolu na distinktivnim testovima *(Separate Test)* rješavanja matematičkih problemskih zadataka, pa znanstvenici pretpostavljaju da razlike u spolu nisu, barem kod dvanaestogodišnjaka, rezultat genetskih razlika (Duffy i dr., 1997, prema Klasnić 2009). Novija istraživanja ne pronalaze značajnu razliku između postignuća dječaka i djevojčica u matematičkim sposobnostima (Delgado i Prieto, 2004; Fannema 2000, prema Klasnić 2009). Utvrđeno je da razlike po spolu u rješavanju problemskih zadataka kod djece prije polaska u školu i kod učenika osnovne škole ne postoje ili su zanemarive. (Klasnić, 2009)

Analizirala sam učestalost korištenja dvodimenzionalnih strategija u ukupnom uzorku učenika prema spolu. U tablici 7. nalazi se broj učenika i učenica koji/e su 1. zadatak, u kojemu je bio postavljen dvodimenzionalni problem, riješili/e koristeći dvodimenzionalne strategije.

Tablica 7. Upotreba dvodimenzionalnih strategija u rješavanju 1. zadatka prema spolu

	MUŠKI	ŽENSKI	Ukupno	UČENICI %	UČENICE %
STRATEGIJA 1	1	1	2	3,57%	3,70%
STRATEGIJA 2	6	7	13	21,43%	25,93%
STRATEGIJA 3	11	5	16	39,29%	18,52%
STRATEGIJA 4	4	9	13	14,29%	33,33%
STRATEGIJA 5	6	5	11	21,43%	18,52%
Ukupno:	28	27	55		

Najjednostavniju strategiju 1 koja se temelji na strategiji pokušaja i pogrešaka, u podjednakom postotku su koristili i učenici i učenice. Učenice su u većem postotku koristile strategiju 2 u odnosu na učenike, dok su učenici više koristili strategiju 3 prilikom rješavanja prvog zadatka. Učenice su upotrebljavale složenije strategije 4 i 5 u kojoj je jedan predmet postavljen kao stalan u postotku 51,85%, a iste su učenici koristili u postotku od 35,71%. Strategiju 5 podjednako koriste i učenici i učenice. Rezultati prikazani u grafikonu 5. prikazuju postotak od ukupnog broja učenica, odnosno učenika, koji koriste pojedinu strategiju.

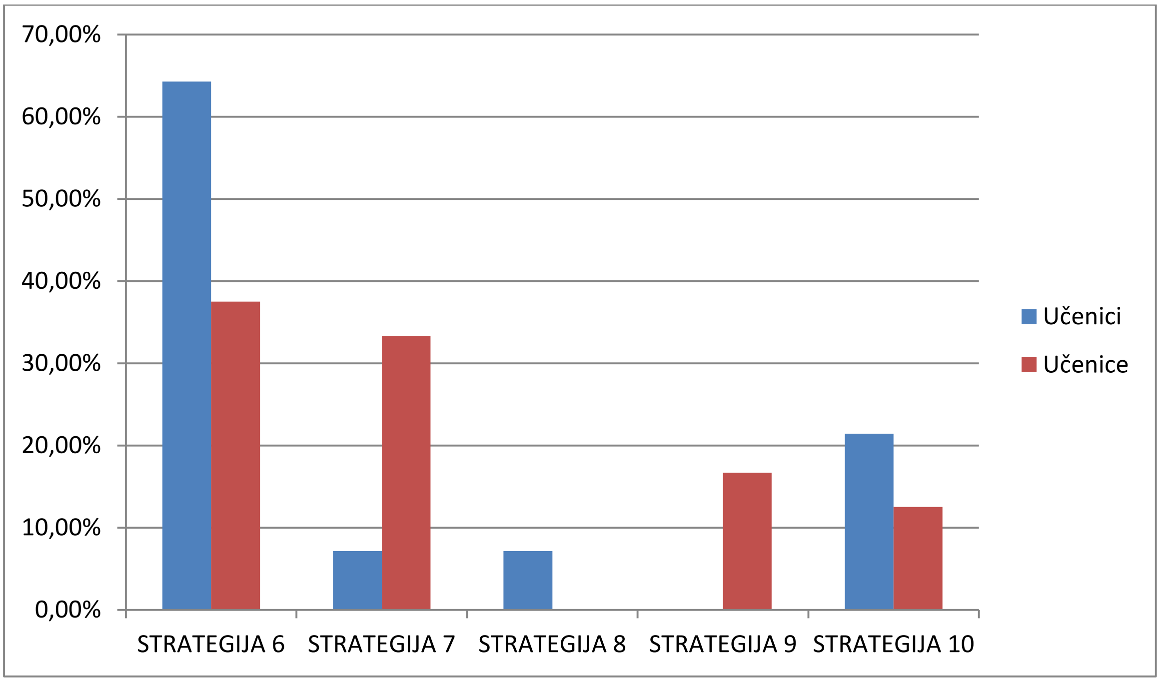


Grafikon 5. Razlike u korištenju dvodimenzionalnih strategija između učenika i učenica

Analizom učestalosti korištenja trodimenzionalnih strategija u 2. zadatku u kojem se dvjema poznatim stavkama iz prethodnog zadatka dodaje još jedna stavka (vrata u dvije različite boje) došla sam do rezultata prikazanih u tablici 8. Iz tablice 8. vidljivo je da i učenici i učenice u rješavanju trodimenzionalnog zadatka najčešće koriste najjednostavniju strategiju 6 i to u jednakom broju. Grafikon 6 prikazuje razlike u korištenju trodimenzionalnih strategija između učenika i učenica. U ovom slučaju učenici su koristili manje sustavne strategije, strategiju 6, 7 i 8 u ukupnom postotku od 78,57%, dok su učenice strategije 6, 7 i 8 koristile u postotku od 70,83%. Učenici nisu koristili strategiju 4, dok učenice jesu i to u postotku od 16,67%. Podjednak broj učenika i učenica koristio je najsustavniju strategiju 5.

Tablia 8. Upotreba trodimenzionalnih strategija u rješavanju 2. zadatka s obzirom na spol

	Ukupno	MUŠKI	ŽENSKI	UČENICI	UČENICE
STRATEGIJA 6	18	9	9	64,29%	37,50%
STRATEGIJA 7	9	1	8	7,14%	33,33%
STRATEGIJA 8	1	1	0	7,14%	0,00%
STRATEGIJA 9	4	0	4	0,00%	16,67%
STRATEGIJA 10	6	3	3	21,43%	12,50%
Ukupno	38	14	24		



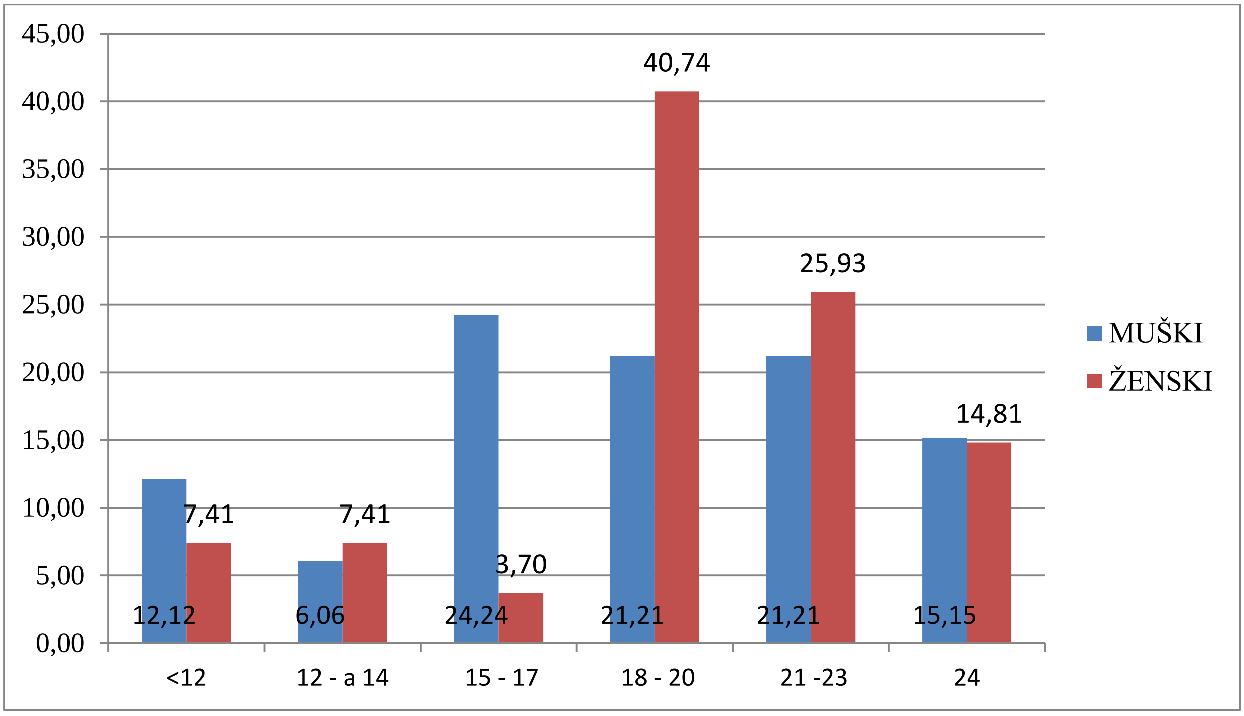
Grafikon 6. Razlike u korištenju trodimenzionalnih strategija između učenika i učenica

Treći zadatak odnosio se na ispisivanje kombinacije znamenaka za šifru na lokotu. Učenici su trebali od znamenaka 0, 1, 2 i 3 složiti četveroznamenkaste brojeve, ali da se pritom znamenke ne ponavljaju. Učenici su mogli složiti najviše 24 kombinacije (4•3•2=24). Njihove odgovore analizirala sam tako da sam prebrojala koliko imaju točnih kombinacija od mogućih 24. Rezultati su prikazani u tablici 5 i grafikonu 6.

Tablica 9 Razlike u rješenjima 3. zadatka s obzirom na spol

Broj točnih kombinacija	MUŠKI		ŽENSKI		UKUPNO
	broj	%	broj	%	
<12	4	12,12	2	7,41	6
12-14	2	6,06	2	7,41	4
15-17	8	24,24	1	3,70	9
18-20	7	21,21	11	40,74	18
21-23	7	21,21	7	25,93	12
24	5	15,15	4	14,81	9

Iz tablice 9 možemo vidjeti da postoje razlike između učenika i učenica u broju napisanih točnih kombinacija kao odgovor na 3. zadatak. Najveći broj učenika napisao je od 15 do 17 kombinacija brojeva, dok je najviše učenica napisalo od 18 do 20 kombinacija. Broj učenica i učenika koji su pronašli i zapisali sve kombinacije je podjednak, 14,81% učenica je napisalo sve 24 kombinacije, kao i 15,15% učenika, kao što je prikazano u grafikonu 7.



Grafikon 7. Razlike u 3. zadatku s obzirom na spol

9.5. Rezultati učenika koji pokazuju poseban interes za matematiku

U anketi provedenoj s učiteljicama promatranih razreda saznala sam da učiteljice koriste problemske zadatke u nastavi te da su učenici na Likertovoj skali ocijenjeni kao dobri u rješavanju istih. Učiteljice su izdvojile učenike koji pokazuju poseban interes za matematiku. Učiteljice su ukupno izdvojile 15 učenika i učenica koji pokazuju poseban interes za učenjem matematike te su kao njihove osobine po kojima se razlikuju od ostalih učenika navele sljedeće: „*brzina i točnost u rješavanju, bolje logičko mišljenje i zaključivanje, veća samostalnost u radu, samostalno i točno rješavanje „težih“ tipova zadataka, ranije uočavanje problema u zadatku, zainteresiranost za problemske zadatke i lakoća rješavanja*.“ Rezultate tih učenika sam posebno analizirala, a rezultate prikazala u nastavku rada.

Pavleković s obzirom na učenikovu darovitost za matematiku razlikuje:

- potencijalno darovite učenike
- učenike iznadprosječnih matematičkih sposobnosti
- učenike prosječnih matematičkih sposobnosti
- učenike s nedovoljno razvijenim sposobnostima za matematiku (Pavleković, 2009)

Uspoređujući osobine učenika koje su učiteljice navele u anketi s osobinama skupina učenika s obzirom matematičku darovitost koju Pavleković navodi u knjizi Matematika i nadareni učenici, primijetila sam da većina osobina izdvojenih učenika odgovara osobinama učenika s iznadprosječnim matematičkim sposobnostima.

Istraživanja koje je provela English (English, 1993., 2007) pokazala su da djeca koja usvoje ekspertnu strategiju pokazuju eksplicitno i stabilno razumijevanje svojih postupaka i sposobna su objasniti zašto je to najbolje rješenje za njihov problem.

U skladu s tim podacima pretpostavila sam da će učenici koji pokazuju poseban interes za učenjem matematike riješiti zadatke koristeći najviše sustavne strategije rješavanja problema te će moći objasniti svoje postupke. Rješenja učenika koje su učiteljice izdvojile kao učenike s posebnim interesom za nastavu matematike posebno sam analizirala, i rezultate prikazala u nastavku rada.

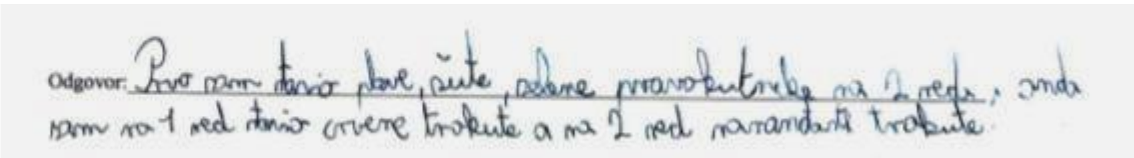
9.5.1. Strategije korištene u 1. zadatku

Analizom radova učenika koji prema mišljenjima učiteljica pokazuju poseban interes za matematiku pokazao je da je 7 učenika tijekom rješavanja dvodimenzionalnog problema koristilo sustavnu strategiju 5 s jednim stalnim predmetom. U tablici 10. vidimo da je samo dvoje učenika koristilo nesustavne strategije, odnosno metodu pokušaja i pogrešaka.

Tablica 10. Strategije rješavanja 1. zadatka

1.zadatak		
	Broj učenika	Postotak
STRATEGIJA 1	1	6,67%
STRATEGIJA 2	1	6,67%
STRATEGIJA 3	3	20,00%
STRATEGIJA 4	3	20,00%
STRATEGIJA 5	7	46,67%
UKUPNO	15	

Učenici koji su rješavali zadatak strategijom 5 bili su sposobni objasniti svoje postupke što je vidljivo na slikama 26., 27. i 28.



Slika 26. Lukin odgovor na 1. zadatak

„Prvo sam stavio plave, žute, zelene pravokutnike na 2 reda,
onda sam na 1. red stavio crvene trokute, a na 2. red narančaste trokute."

Slika 27. Matijin odgovor na 1. zadatak

„Prvo sam stavio žute pravokutnike i na njih krovove, onda sam stavio zelene i krovove.
Pa sam stavio plave pravokutnike i krovove na njih."


Odgovor: Zaljepila sam dva pravokutnika iste boje u svaki red i mijenjala boje krovova.

Slika 28. Anin odgovor na 1. zadatak

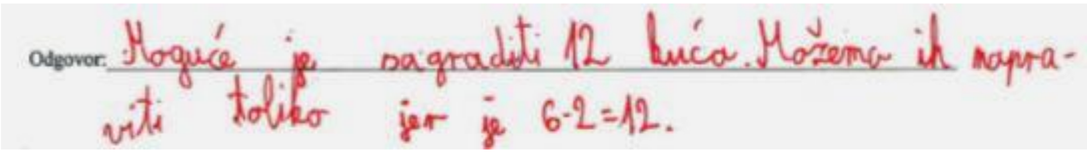
„Zaljepila sam dva pravokutnika iste boje u svaki red i mijenjala boje krovova.“

9.5.2. Strategije korištene u 2. zadatku

Učenici koji pokazuju poseban interes za učenjem matematike drugi zadatak su rješavali raznim strategijama od čega ih je najviše koristilo strategiju 6 što je vidljivo u tablici 11. Troje učenika je koristilo najsustavniju strategiju 10. Objašnjenja učenika koji su koristili najsustavnije strategije vidljivi su na slikama 29., 30. i 31.

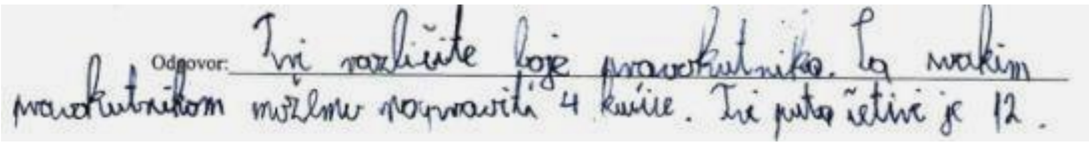
Tablica 11. Strategije rješavanja 2. zadatka

2.zadatak		
	Broj učenika	Postotak
STRATEGIJA 6	8	53,33%
STRATEGIJA 7	2	13,33%
STRATEGIJA 8	1	6,67%
STRATEGIJA 9	1	6,67%
STRATEGIJA 10	3	20,00%
UKUPNO	15	


Odgovor: Moguće je sagraditi 12 kuća. Možemo ih napraviti toliko jer je 6·2=12.

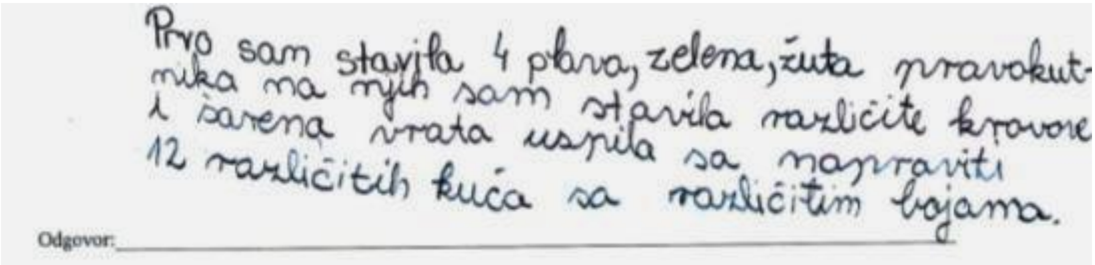
Slika 29. Anin odgovor na 2. zadatak

„Moguće je sagraditi 12 kuća. Možemo ih napraviti toliko jer je 6·2=12“


Odgovor: Tri različite boje pravokutnika. Sa svakim pravokutnikom možemo napraviti 4 kućice. Tri puta četiri je 12.

Slika 30. Lukin odgovor na 2. zadatak

„Tri različite boje pravokutnika. Sa svakim pravokutnikom možemo napraviti 4. Kućice. Tri puta četiri je 12.“


Prvo sam stavila 4 plava, zelena, žuta pravokut-
nika na njih sam stavila različite krovove
i šarena vrata uspila sa napraviti
12 različitih kuća sa različitim bojama.
Odgovor:

Slika 31. Anin odgovor na 2. zadatak

„Prvo sam stavila 4 plava, zelena, žuta pravokutnika na njih sam stavila različite krovove i šarena vrata. Uspila sam napraviti 12 različitih kuća sa različitim bojama.“

Učenica Ana je logički zaključila da će ako je u prošlom zadatku gdje nisu bila ponuđena vrata u dvije boje bilo ukupno 6 mogućih kombinacija, u ovom zadatku uz dvije boje vrata biti ukupno 6 · 2= 12 kombinacija (vidi sliku 31.).

9.5.3. Rješenja 3. zadatka

Iz tablice 12. možemo vidjeti da je trećina učenika s posebnim interesom za matematiku napisala sve moguće kombinacije znamenaka u 3. zadatku. Druga trećina učenika je napisala 22 i 23 kombinacije, a preostala trećina je napisala manje od 18 kombinacija. Iskustvo koje su učenici stekli rješavanjem dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih zadataka te korištenje konkretnog materijala kod nekih učenika je utjecalo na uspješnost rješavanja zadnjeg zadatka.

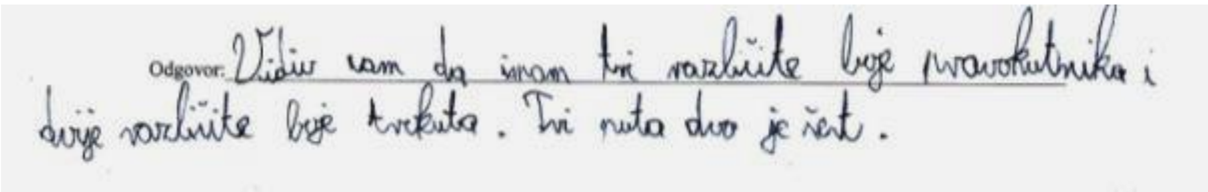
Tablica 12. Broj točnih kombinacija u 3. zadatku

3.zadatak		
Broj točnih kombinacija	Broj učenika	Postotak
<12	1	6,67%
12, 13,	0	0,00%
14, 15	1	6,67%
16, 17	2	13,33%
18, 19	0	0,00%
20, 21	1	6,67%
22, 23	5	33,33%
24	5	33,33%
Ukupno	15	

Učenici koji su izdvojeni u ovoj grupi učenika koji pokazuju poseban interes za matematiku znatno brže i sustavnije su rješavali sva tri zadatka u odnosu na ostale učenike u razredu. No osim tih 15 učenika bilo je još pojedinaca koji su pojedine zadatke riješili primjenjujući najsustavnije strategije, ispisujući sve moguće kombinacije i smisleno objašnjavajući svoje postupke.

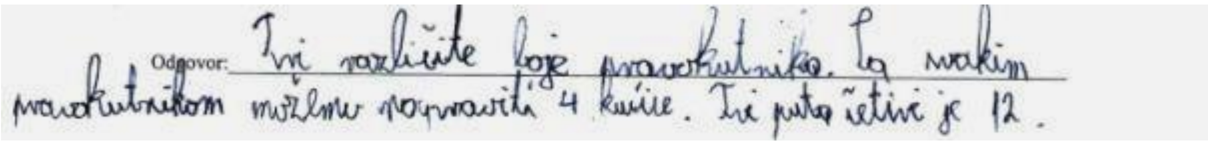
Od svih učenika koji su okarakterizirani da pokazuju poseban interes za matematiku učenik Luka riješio je sva tri zadatka koristeći najsustavnije strategije i pritom je uočio pravilo produkta: Ako je sastavljeni izbor takav da prvo biramo između *m* mogućnosti i onda, neovisno o prvom izboru, između *n* mogućnosti, onda je broj svih mogućnosti $n{\cdot}m$.

Učenik Luka je nakon zalijepljene dvije kućice koje su se sastojale od plavog pravokutnika s crvenim i s narančastim krovom uočio da će konačan rezultat biti 6, jer kao što je on napisao: „*Vidio sam da imam tri različite boje pravokutnika i dvije različite boje trokuta. Tri puta dva je šest*.“ (slika 33.). Učenik je uočio pravilo produkta koje je kasnije primijenio i kod rješavanja trodimezionalnog problema, a isto pravilo je pronašao i u 3. zadatku u kojem je problem bio četverodimenzionalan. Sva rješenja je potkrijepio odgovorima vidljivim na slikama 32., 33. i 34.



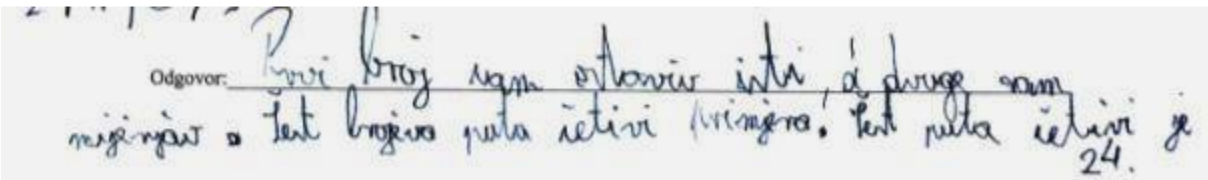
Slika 32. Lukin odgovor na 1. zadatak

„Vidio sam da imam tri različite boje pravokutnika i dvije različite boje trokuta. Tri puta dva je šest.“



Slika 33. Lukin odgovor na 2. zadatak

„Tri različite boje pravokutnika sa svakim pravokutnikom možemo napraviti 4 kućice. Tri puta četiri je 12.“



Slika 34. Lukin odgovor na 3. zadatak

„Prvi broj sam ostavio isti, a druge sam mijenjao. Šest brojeva puta četiri primjera. Šest puta četiri je 24.“

10. ZAKLJUČAK

Ovim istraživanjem željela sam ispitati kako uspješno učenici četvrtih razreda rješavaju kombinatorne problemske zadatke te koje strategije koriste prilikom njihovog rješavanja. Rezultati su pokazali da su učenici uspješni u rješavanju takvih zadataka te da koriste različite strategije od strategija koje se temelje na pristupu pokušaja i pogrešaka do najsustavnijih strategija uz korištenje niza glavnih i sporednih predmeta te uočavanja pravila za rješavanje takvih zadataka. Učenici su korištenjem sustavnijih strategija imali manju vjerojatnost pogreške te su brže došli do konačnog broja kombinacija.

Istraživanje je potvrdilo da su učenici koji su koristili najsustavnije strategije bili su sposobni svoje rezultate objasniti i potkrijepiti postupke rješavanja riječima te im je za rješavanje postavljenih zadataka trebalo znatno manje vremena. No ovo istraživanje je pokazalo da je i dio učenika koji su koristili manje sustavne strategije došao do točnih rješenja analiziranjem i praćenjem svojih postupaka.

Dio istraživanja odnosio se na razlike u uspješnosti rješavanja učenika koji pokazuju poseban interes za matematikom u odnosu na ostale učenike. Istraživanje je pokazalo da učenici koji pokazuju poseban interes za matematiku koriste sustavne strategije rješavanja problema, prenose iskustvo rada s konkretnim materijalima na aritmetičke zadatke, logičkim razmišljanjem i povezivanjem brzo dolaze do rješenja i svoje postupke sposobni su objasniti te neki od njih uočavaju i pravilo produkta na jednostavnijim zadacima te isto pravilo kkoriste u težim zadacima i zadacima s većim brojem kombinacija.

Poznavanje različitih strategija rješavanja problemskih zadataka važno je kako bi učitelji mogli kvalitetno realizirati postavljene ciljeve početne nastave matematike. No osim poznavanja strategija koje učenici mogu koristiti u rješavanju kombinatornih zadataka važno je u redovnoj i dodatnoj nastavi učenike motivirati za rješavanje problemskih zadataka tako da im pokažemo različite metode i strategije rješavanja zadataka. Učenici će na taj način, kroz problemske zadatke i zadatke otvorenog tipa, razvijati sposobnosti logičkog mišljenja, zaključivanja, povezivanja, kreativnosti i samopouzdanja.

11. LITERATURA

1. Buggle, F. (2002) Razvojna psihologija Jeana Piageta.Jastrebarsko: Naklada Slap.
2. Cotič, M., Felda D. (2007), *Children and simple combinatorial situations*, International scientific colloquium Mathematics and children (How to teach and learn mathematics), Monography, , 2007, Osijek Editor: M. Pavleković, Element, 58-68.
3. English, L. D. (2007) Children's strategies for solving two – and – three dimensional combinatorial problems. U Leder, Gilah C. i Forgasz, Helen J., (eds) *Stepping stones for the 21st century* (139.-156). Nizozemska: Sense Publishers. Pribavljeno 12.3. s http://eprints.qut.edu.au/18047/
4. Heinze, A. (2005) Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students. *International Education Journal*. 175-183. Pribavljeno 12.3. s http://eric.ed.gov/?id=EJ854968
5. Jovičić, D., Obradović M. (2007) *Elementi logike u nastavi matematike*. Golden marketing- Tehnička knjiga: Zagreb.
6. Klasnić, I. (2009) *Problemski zadaci: Kako ih rješavaju uspješni i neuspješni učenici. Odgojne znanosti*. Pribavljeno 13.5.2015. s http://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=62701
7. Kos, D., Glasnović Gracin, D.(2012) Problematika tekstualnih zadataka. *MIŠ Matematika i škola*. 14(66). 5-8.
8. Kurnik, Z. (2000) Iz rječnika metodike: Matematički zadatak. *MIŠ Matematika i škola.* 7. 51-58.
9. Liebeck, P. (1995) *Kako djeca uče matematiku*. Educa: Zagreb.
10. Markovac, J. (2001) *Metodika početne nastave matematike*. Zagreb: Školska knjiga.
11. Obradović, M. (1998) *Opća metodika nastave matematike*. Zagreb: Prosvjeta.
12. Pavleković, M. (2009) Matematika i nadareni učenici. Zagreb: Element.
13. Pavleković, M.(2008) Metodika nastave matematike s informatikom . Zagreb: Element.
14. Pavlin-Bernardić, N., Rovan, D., Vlahović-Štetić V. (2011) *Kad u matematici "više" zapravo znači "manje": Analiza uspješnosti u rješavanju problemskih zadataka usporedbe* Pribavljeno 19.2.2015. s http://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=102606
15. Sharma, M. (2001) Matematika bez suza: kako pomoći djetetu s teškoćama u učenju matematike/ prema Mahesh C. Sharma sastavila i pripremila Ilona Posokhova. Lekenik: Ostvarenje.

16. Varošanec, S. (2014) Metoda rješavanja unatrag. *MIŠ Matematika i škola*.16(77). 52-54.
17. Veljan, D. (2001) Kombinatorna i diskretna matematika. Algoritam: Zagreb.
18. Vlahović-Štetić, V., Vizek-Vidović V. (1998) *Kladim se da možeš…psihološki aspekti početnog poučavanja matematike.*Zagreb: Udruga roditelja „Korak po korak“.

PRILOZI

Prilog 1 Anketa za učitelje

1. Koristite li problemske zadatke u nastavi matematike? DA NE
2. Koliko često koristite problemske zadatke u nastavi matematike?
   NIKADA RIJETKO PONEKAD ČESTO VRLO ČESTO
3. Koliko su učenici uspješni u rješavanju problemskih zadataka? (na ljestvici od 1 nedovoljno do 5 odlični)
   1 2 3 4 5
4. Ima li učenika koji pokazuju poseban interes za područje matematike?
   ____
   ____
   ____
   ____
5. Ima li darovitih učenika?
   ____
   ____
   ____
   ____
6. Kako ste prepoznali darovitost/poseban interes učenika za matematiku? (Koje osobine daroviti učenici/učenici s posebnim interesom za matematiku posjeduju i po čemu se razlikuju od ostalih učenika?)
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

ŽIVOTOPIS

Rođena sam 31. kolovoza. 1991. u Slavonskom Brodu. Živim u selu Sibinj, nedaleko od Slavonskog Broda. Osnovnu školu „Ivan Mažuranić“ u Sibinju završila sam 2006. godine nakon čega sam upisala Ekonomsko-birotehničku školu u Slavonskom Brodu, smjer ekonomist. Nakon završene srednje škole u 2010. godini upisala sam Učiteljski fakultet u Osijeku, dislocirani studij u Slavonskom Brodu, koji danas nosi naziv Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti. Stručno-pedagošku praksu odradila sam u osnovnoj školi „Ivan Mažuranić“ u Sibinju. Tijekom studija sudjelovala sam u humanitarnim akcijama te organizaciji i provedbi 2. Međunarodne studentske konferencije „Izazovi u odgoju i obrazovanju“ koja se održala u Slavonskom Brodu u svibnju 2015.godine. Uz studiranje radila sam preko studentskog ugovora u kopirnici u Slavonskom Brodu.