

Pojam četverokuta u početnoj nastavi matematike

Leko, Monika

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Education / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:141:502542>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-04-02**



Repository / Repozitorij:

[FOOZOS Repository - Repository of the Faculty of Education](#)



SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI U OSIJEKU
DISLOCIRANI STUDIJ U SLAVONSKOME BRODU

MONIKA LEKO

POJAM ČETVEROKUTA U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

DIPLOMSKI RAD

SLAVONSKI BROD, 2015.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI U OSIJEKU
DISLOCIRANI STUDIJ U SLAVONSKOME BRODU

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni učiteljski studij

POJAM ČETVEROKUTA U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE
DIPLOMSKI RAD

Predmet: Metodika matematike

Mentor: izv. prof. dr. sc. Zdenka Kolar – Begović

Student: Monika Leko

Matični broj: 2225

Modul: modul A (razvojni smjer)

Slavonski Brod

srpanj, 2015.

Ne učimo za školu, učimo za život.

Seneka

SAŽETAK

Geometrija je jedna od grana matematike i njezini odgovarajući sadržaji su uvršteni u redovnu nastavu osnovne i srednje škole. Geometrijski objekti nas okružuju i stoga pružaju mogućnost svakodnevne percepcije njihovih različitih oblika. Upravo zbog svoje konkretnosti, uvođenje geometrijskih sadržaja pruža niz metodičkih prilika u kojima učitelj učenika može učini aktivnim sudionikom nastavnog procesa, a znanja stečena na takav način daleko se trajnije zadržavaju. U ovom radu su navedeni metodički postupci uvođenja pojma pravokutnika i kvadrata u postojećim udžbenicima i ostalim materijalima. Prikazana je aktivnost kojom kroz igru, kao primarnu aktivnost djeteta, učenici mogu usvojiti i uvježbati određene sadržaje. Aktivnosti tog tipa su izvrstan izbor za razvoj geometrijskog mišljenja i prostornog zora.

Ključne riječi: geometrija, četverokut, kvadrat, pravokutnik

SUMMARY

Geometry is a branch of mathematics and some contents of it are part of regular primary and secondary school curriculum. Geometrical objects are all around us and they give us opportunity to perceive their shapes every day. They are so specific that introducing them into the classroom gives a teacher possibility to make students active participants of the teaching process. The knowledge acquired during such a process is remembered much longer. In this paper there are listed methods which are used in the textbooks and other materials to introduce the concept of a rectangle and a square. The paper explains activity which is a part of the game, a child's primary activity, through which students can adopt and practice some contents. This type of activities are a great chance to develop geometrical thinking and space images.

Key words: geometry, quadrilateral, square, rectangle.

SADRŽAJ

1. UVOD	1
1. OSNOVNI ELEMENTI GEOMETRIJE ČEVEROKUTA	2
1.1. Definiranje pojma četverokuta	2
1.2. Elementi četverokuta	3
1.3. Klasifikacija četverokuta s obzirom na paralelnost stranica.....	5
2. METODIČKI PRISTUP OBRADI POJMA ČETVEROKUTA U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE	8
2.1. Prvi razred.....	10
2.2. Drugi razred	14
2.3. Treći razred.....	15
2.4. Četvrti razred	17
3. KVADRAT I PRAVOKUTNIK U ZADACIMA S NATJECANJA	26
3.1. Natjecanja iz matematike u Republici Hrvatskoj	26
3.2. Matematički klokan	32
4. TANGRAM - PRIMJER AKTIVNOSTI NAMIJENJENE RAZVOJU GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA I PROSTORNOG ZORA	40
4.1. Radionica „Tangram“	40
5. ZAKLJUČAK	47
6. LITERATURA	48
Prilozi	49
Prilog 1.	49
Popis elektronskih priloga.....	54
Popis slika.....	54
Popis tablica.....	56
Životopis.....	57

1. UVOD

Geometrija je jedna od grana matematike i kao takva, uvrštena je u redovnu nastavu osnovne i srednje škole. Povijesni ostaci nam govore da je već pračovjek poznao geometrijske oblike i likove. Prva knjiga u kojoj su usustavljena do tada poznata znanja iz geometrije su *Elementi* koje je napisao Euklid, „otac geometrije“. Njegova rasprava o geometriji, *Elementi*, smatra se najsavršenijim matematičkim djelom sve do modernoga doba.

Cilj nastave matematike je stjecanje temeljnih matematičkih znanja potrebnih za razumijevanje pojava i zakonitosti u prirodi i društvu, stjecanje osnovne matematičke pismenosti i razvijanje sposobnosti i umijeće rješavanja matematičkih problema. Poznavanje svojstava geometrijskih likova je upravo ono što u velikoj mjeri pridonosi ostvarivanju cilja. Djeca razlikuju geometrijske likove vrlo rano i učeći ih deskriptivnom vokabularu razvijamo i njihovu verbalnu komunikaciju. Prakticiranje geometrije pridonosi i razvoju logičkih vještina, kao i predčitalačkom i pismenom izražavanju. Kada uče slova, djeca će najprije zapamtiti ona koja ih podsjećaju na likove koje su već upoznali.¹ Osnova za usvajanje matematičkih sadržaja, posebno geometrijskih, jest usvajanje pojmova, dok je u drugim predmetima to uglavnom usvajanje činjenica. Prilikom organizacije nastave matematike nužno je uzeti u obzir razdoblje u kojem se dijete nalazi, a uspješnost poučavanja geometrijskih sadržaja u velikoj mjeri ovisi o prepoznavanju razine na kojoj se dijete nalazi prema van Hiele-ovoj teoriji.

Tema ovog rada je pojmovni sustav obrade četverokuta u početnoj nastavi matematike. Rad sadrži četiri poglavlja. U prvom poglavlju sadržani su osnovni elementi geometrije četverokuta, a u drugom metodički pristup obrade pojma četverokuta gdje je vidljiv jedan logički slijed sadržaja. Nakon toga slijedi pregled zadataka s natjecanja te primjer aktivnosti koja pridonosi razvoju geometrijskog mišljenja i prostornog zora.

¹ Pozivam se na tekst Amande West, utemeljiteljice kompanije Colorful Concepts, Zašto je važno od najranije dobi učiti geometrijske likove i boje?, pribavljeno 13.6.2015., sa <http://www.index.hr/ljubimci/clanak/zasto-je-vazno-od-najranije-dobi-uciti-boje-i-geometrijske-likove/700716.aspx>

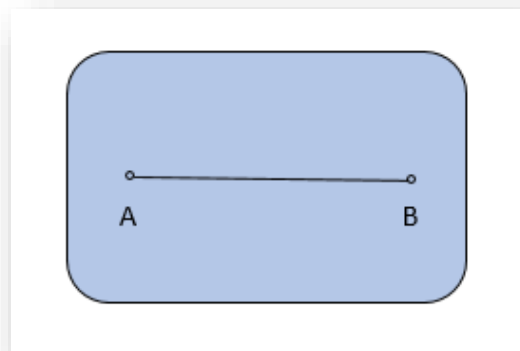
1. OSNOVNI ELEMENTI GEOMETRIJE ČEVEROKUTA

1.1. Definiranje pojma četverokuta

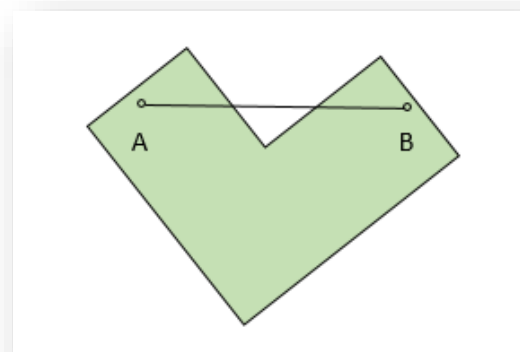
Osnovni geometrijski pojmovi su točka, pravac, ravnina i prostor. Dio geometrije koji izučava skupove točaka u ravnini naziva se planimetrija. Ravninu možemo najjednostavnije predočiti tankim papirom. Točku predočavamo vrhom nekog šiljastog predmeta, a pravac napetom niti.

Prije samog definiranja četverokuta definirat ćemo pojam konveksnog skupa u ravnini.

Za skup S kažemo da je konveksan ako vrijedi $\forall A, B \in S \Rightarrow \overline{AB} \subseteq S$.



Slika 1. Konveksan skup



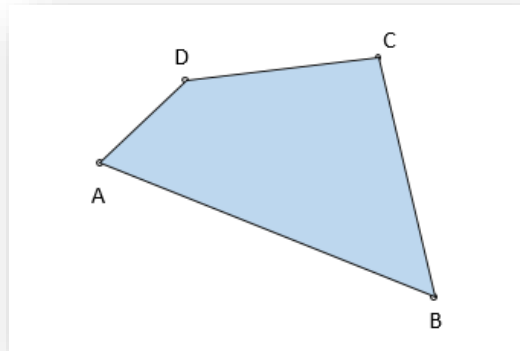
Slika 2. Nije konveksan skup

Iz definicije konveksnog skupa zaključujemo da su pravac, polupravac i dužina konveksni skupovi. Također, skup koji se sastoji od samo jedne točke, dogovorno se smatra konveksnim skupom.

Najmanji konveksan skup koji sadrži točke A i B jest dužina \overline{AB} .

Najmanji konveksan skup koji sadrži tri nekolinearne točke A, B, C je trokut ABC.

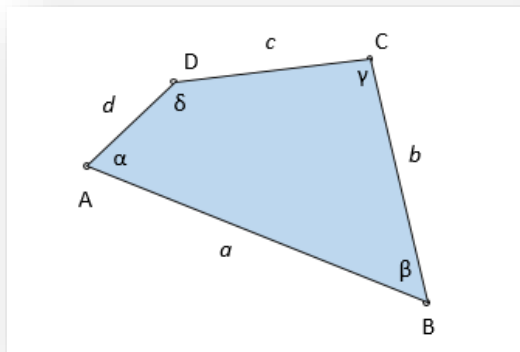
Definicija 1. Neka su A, B, C i D četiri različite točke ravnine od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu. Najmanji konveksan skup koji sadrži točke A, B, C i D naziva se četverokut.



Slika 3. Četverokut

Četverokut je dio ravnine omeđen dužinama \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DA} .

1.2. Elementi četverokuta



Slika 4. Elementi četverokuta

Točke A, B, C i D zovu se vrhovi četverokuta.

Dužine \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{DA} su stranice četverokuta. Stranice četverokuta i njihove duljine obično označavamo malim pisanim slovima a, b, c, d.

Parove dužina \overline{AB} i \overline{CD} te \overline{BC} i \overline{DA} nazivamo nasuprotnim stranicama četverokuta.

Vrhove koji leže na istoj stranici zovemo susjedni vrhovi, a ako ne leže na istoj stranici zovemo ih suprotnim vrhovima.

Stranice sa zajedničkim vrhom nazivamo susjednim stranicama, a ako nemaju zajednički vrh, onda ih nazivamo nasuprotnim stranicama.

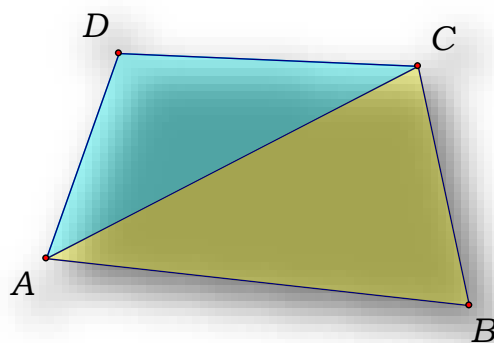
Dužina koja spaja suprotne vrhove četverokuta naziva se dijagonala četverokuta. Dakle, svaki četverokut ima dvije dijagonale.

Kutovi ABCD četverokuta su: $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ i $\angle CDA$. Kutovi četverokuta i njihove mjere obično se označavaju slovima grčkog alfabeta: α , β , γ i δ . To su unutarnji kutovi četverokuta. α i γ te β i δ su nasuprotni kutovi.

Vrijedi tvrdnja:

Teorem 1. Zbroj unutarnjih kutova četverokuta iznosi 360° .

Dokaz. Neka je dan četverokut ABCD. Rastavimo četverokut ABCD na dva trokuta ABC i ACD. Kako je zbroj unutarnjih kutova trokuta 180° slijedi da je zbroj unutarnjih kutova četverokuta 360° .



Slika 5. Zbroj unutarnjih kutova četverokuta

Analogno se može dokazati da je zbroj unutarnjih kutova n-terokuta $(n-2) \cdot 180^\circ$.

1.3. Klasifikacija četverokuta s obzirom na paralelnost stranica

U ovom poglavlju razmatramo jednu klasifikaciju četverokuta s obzirom na paralelnost stranica. Na slici 8. je dan geometrijski prikaz klasifikacije.

Navest ćemo definicije četverokuta spomenutih u navedenoj klasifikaciji.

Definicija 1. Četverokut koji ima bar jedan par paralelnih stranica naziva se *trapez*.



Slika 6. Trapezi

Paralelne stranice trapeza nazivaju se osnovice, a ostale dvije stranice nazivaju se kraci. Unutarnji kutovi uz krake trapeza su suplementarni kutovi.

Definicija 2. Četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne naziva se *paralelogram*.

Mogu se dokazati sljedeće tvrdnje.

- Nasuprotne stranice paralelograma su sukladne.
- Nasuprotni kutovi su sukladni.
- Kutovi uz istu stranicu su suplementarni.
- Dijagonale paralelograma se raspolavljaju.

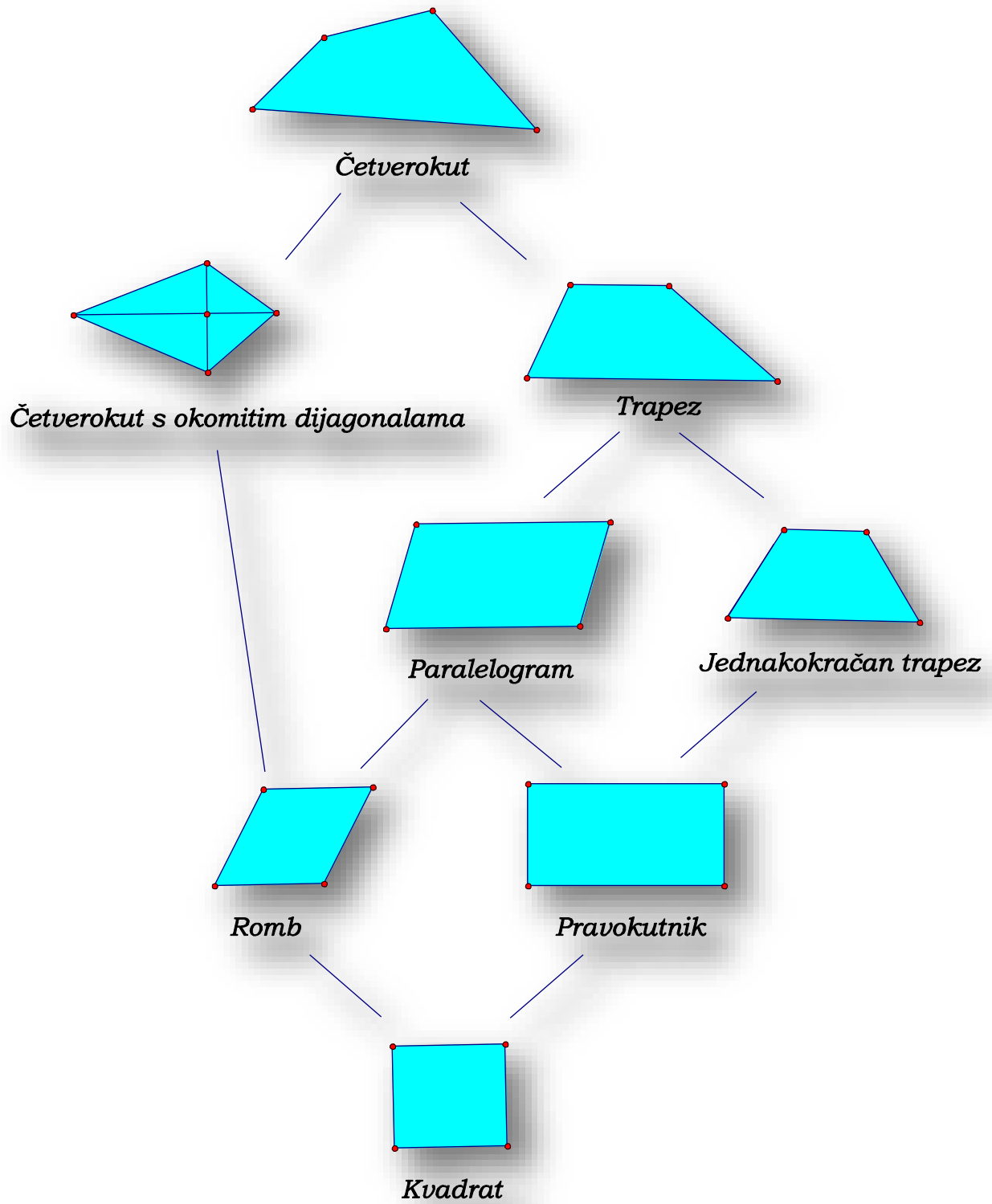


Slika 7. Paralelogrami

Definicija 3. Paralelogram kojemu su susjedne stranice jednake duljine naziva se *romb*.

Definicija 4. Paralelogram koji ima jedan unutarnji kut pravi naziva se *pravokutnik*.

Definicija 5. Pravokutnik kojemu su susjedne stranice jednake naziva se *kvadrat*.



Slika 8. Klasifikacija četverokuta

2. METODIČKI PRISTUP OBRADI POJMA ČETVEROKUTA U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

Prema Teoriji kognitivnog razvoja Jeana Piageta, tijekom prva četiri razreda osnovne škole, dijete se nalazi u fazi konkretnih operacija koja traje od šeste do dvanaeste godine života. U tom razdoblju kod djeteta pojavljuje se mogućnost logičkog razmišljanja, dijete postupno savladava različite oblike konzervacije te počinje shvaćati različite načine razvrstavanja, odnosno klasifikacije. (Vasta i sur., 1998)

Jedan od najvažnijih ciljeva nastave matematike je razvoj logičkog mišljenja. To bi značilo da učenika treba naučiti kako doći od pretpostavke do zaključka, pri tom poštujući prihvaćeno značenje pojmova, zadana pravila i ograničenja te razumjeti način na koji je došao do novih spoznaja. (Zorica-Vuletić, 2000) U skladu s tim u Nastavnom planu i programu za osnovnu školu za 2006./2007. godinu programski sadržaj matematike temelji se na sljedećim načelima: učenicima u osnovnoj školi treba dati znanja koja su nužna svim učenicima neovisno o izboru njihova budućeg zanimanja, opseg, sadržaj i metode nastave treba uskladiti s dobi učenika i treba razvijati i produbljivati matematičko mišljenje učenika i osposobljavati ih za rješavanje i osmišljavanje raznih praktičnih problema. Analogno tome, na istim načelima temelje se i geometrijski sadržaji u udžbenicima i ostalim materijalima za prva četiri razreda osnovne škole.

U 1. razredu imamo sljedeće sadržaje iz geometrije:

1. Tijela u prostoru
2. Ravne i zakrivljene plohe
3. Ravne i zakrivljene crte
4. Točka
5. Odnosi među predmetima
6. Geometrijski likovi

U 2. razredu u cjelini DUŽINA obrađuje se:

1. Dužina kao spojnica dviju različitih točaka
2. Stranice kvadrata, pravokutnika i trokuta

U 3. razredu u cjelini PRAVAC U RAVNINI obrađuje se:

1. Ravnina, likovi u ravnini

2. Pravac, polupravac i dužina kao dijelovi pravca
3. Mjerenje dužine

U cjelini MEĐUSOBNI ODNOSI DVAJU PRAVACA U RAVNINI obrađuje se:

1. Pravci koji se sijeku i usporedni pravci
2. Okomiti pravci

U cjelini KRUG I KRUŽNICA obrađuje se:

1. Krug, kružnica

U 4. razredu u cjelini KUTOVI obrađuje se:

1. Kut
2. Pravi kut
3. Šiljasti i tupi kut

U cjelini TROKUT PRAVOKUTNIK I KVADRAT obrađuje se:

1. Trokut
2. Vrste trokuta s obzirom na stranice
3. Pravokutni trokut
4. Opseg trokuta
5. Pravokutnik i kvadrat
6. Opseg pravokutnika i kvadrata
7. Mjerenje površine
8. Površina pravokutnika i kvadrata

U cjelini KOCKA I KVADAR obrađuje se:

1. Kvadar i kocka
2. Obujam kocke

U nastavi geometrije važno je imati na umu na koji način učenici percipiraju ravninu i prostor te geometrijske oblike u njima. Svatko od nas nalazi se na jednoj od pet van Hiele-ovih razina geometrijskog mišljenja. Učenici iste dobi često su na različitim razinama. Pritom se većina učenika razredne nastave nalazi na nultoj razini. (Čizmešija i suradnici, 2010)

Tablica 1. Primjeri učeničkog zaključivanja(Čizmešija i suradnici, 2010:149)

	Razina 0 Vizualizacija	Razina 1 Analiza	Razina 2 Neformalna dedukcija
OBJEKTI GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA	Pojedinačni likovi	Klase likova	Definicije klasa likova
STRUKTURA GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA	Vizualno prepoznavanje imenovanje vizualno sortiranje	prepoznavanje svojstava kao karakteristika klasa likova	uočavanje i formuliranje logičkih odnosa među svojstvima
PRIMJERI	<i>Svi paralelogrami idu zajedno jer „izgledaju jednako“. Pravokutnici, kvadrati i rombovi nisu paralelogrami jer „ne izgledaju kao paralelogram“.</i>	<i>Paralelogram ima četiri stranice, nasuprotne kutove jednake, nasuprotne stranice jednake, nasuprotne stranice paralelne, dijagonale mu se raspolavljaju itd. Pravokutnik nije paralelogram jer pravokutnik ima kutove od 90°, a paralelogram nema.</i>	<i>Jednakost nasuprotnih stranica povlači njihovu paralelnost. Paralelnost nasuprotnih stranica povlači njihovu jednakost. Jednakost nasuprotnih kutova povlači jednakost nasuprotnih stranica. Raspolavljanje dijagonala povlači simetriju pri rotaciji za 180°.</i>

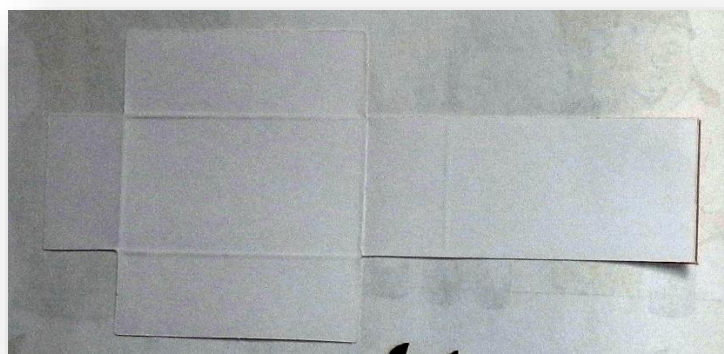
2.1. Prvi razred

Učenje matematike na početku školovanja, u prvom razredu osnovne škole usko je vezano uz djetetovo prirodno okruženje, konkretne probleme i potrebe jer dijete istražuje i upoznaje svijet u kojem živi. Na samom početku nastave matematike nalazi se cjelina *Odnosi među predmetima* i *Oblici u prostoru*. Prije svega, učenik upoznaje odnose među predmetima koje je i sam već koristio, odnosno relacije veći-manji, unutar-izvan. Nakon toga slijedi upoznavanje geometrijskih tijela – kugle, valjka, kvadra, kocke i piramide (pravilne četverostrane). Slijedi upoznavanje ravne i zakrivljene plohe te se obrađuje pojam crte – ravne, zakrivljene i

izlomljene. Upoznaje se i točka kao sjecište crta, njena oznaka te spajanje točaka crtama. Na kraju se uvode i geometrijski likovi – krug, trokut, pravokutnik i kvadrat.

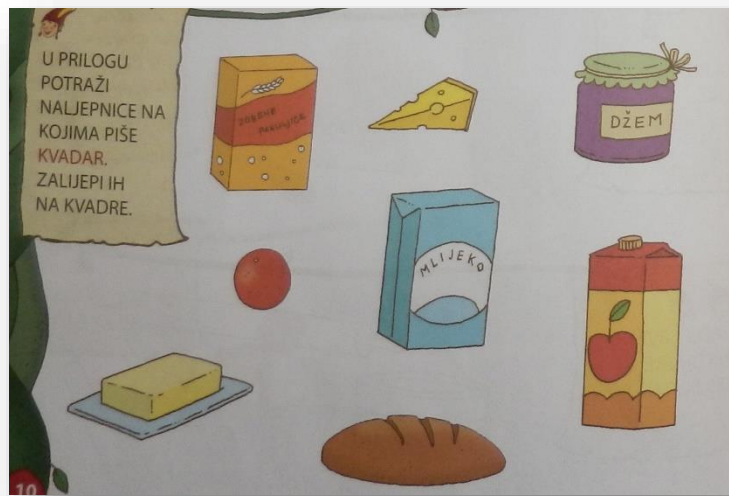
Geometrija je svuda oko nas, proteže se kroz sve sfere ljudskoga života. Okruženi smo mnoštvom geometrijskih tijela i likova. Djetetova primarna aktivnost jest igra, stoga je logično da djeca na samom početku školovanja uče pojmove i likove koji su im bliski i koji ih okružuju, kao npr. kocka i kvadar, kvadrat i pravokutnik. Velik broj predmeta koje okružuju dijete i didaktičkih materijala je upravo u ovim oblicima, a tu su naravno i igračke, npr. „kockice“, koje su neizostavan dio svakog djetinjstva.

Da bi dijete u prvom razredu osnovne škole došlo do pojma geometrijskog lika, prvo treba upoznati geometrijsko tijelo. Učenik prvoga razreda trebao bi znati prepoznati i imenovati geometrijsko tijelo među predmetima iz neposredne okoline, promatrajući modele geometrijskih tijela i ilustracije. Najbolji način za ostvarivanje tog cilja jest sustavno promatranje modela i perceptivno zaključivanje, zato pojmove izgrađujemo na konkretnim modelima. Nakon kugle i valjka, dijete upoznaje kvadar i kocku. U udžbeniku *Matematičkim stazama 1*, autori su navedenim primjerima pridonijeli razvoju prostornoga zora. Pod pojmom prostorni zor podrazumijeva se intuitivni osjećaj za oblike u prostoru, za geometrijske oblike koja nas okružuje i oblike koje formiraju objekti oko nas. Prostorni zor uključuje sposobnost raspoznavanja, vizualnog prikazivanja i transformacije geometrijskih oblika. U njega su uključeni i pogledi na dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike, poput popločavanja ravnine i prostora, presavijanja papira i slično. (Čizmešija i suradnici, 2010) Naime, u samom udžbeniku postavljena je mreža kvadra, što se vidi iz slike 9., koju učenik može složiti.



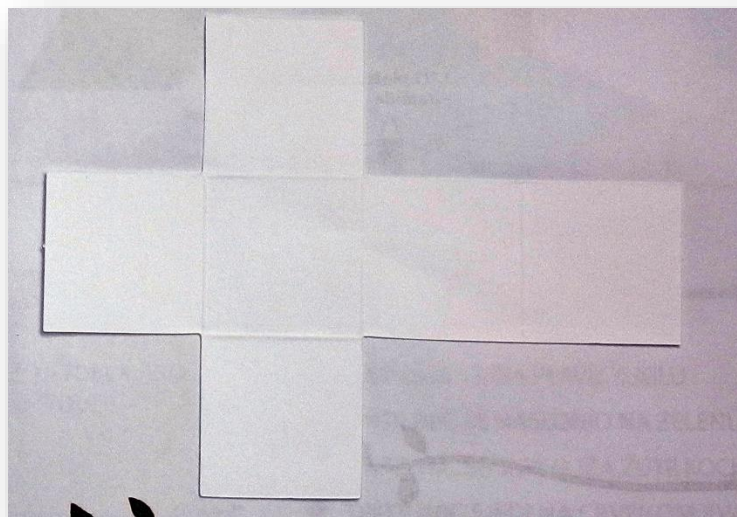
Slika 9. Mreža kvadra (Kosak i suradnici, 2014:10)

Nakon toga slijedi prepoznavanje geometrijskog tijela na ilustracijama predmeta iz neposredne okoline što se vidi na slici 10.

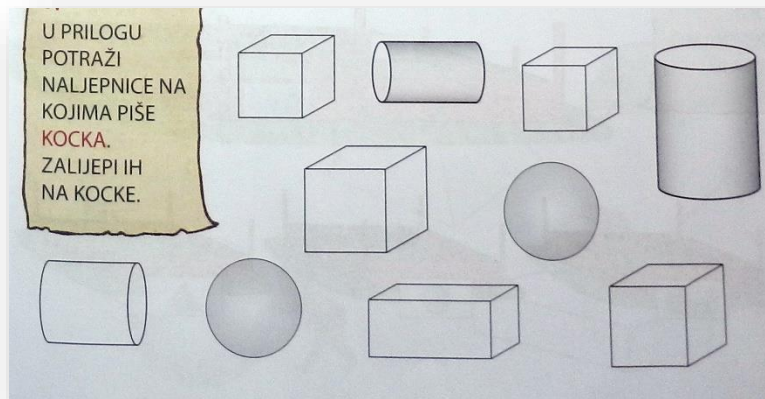


Slika 10. Prepoznavanje kvadra (Kosak i suradnici, 2014:10)

Promatrajući model kvadra, učenici trebaju naučiti da kvadar ima 6 strana, 8 vrhova i 12 bridova (kasnije će učenik uočiti da strane kvadra pravokutnici). Poučavanje pojma kocke, učitelj će organizirati po uzoru na prethodnu obradu. Dakle, ono što je potrebno za dijete prvog razreda je razlikovati kocku od ostalih tijela, naučiti da kocka ima 6 strana, 8 vrhova i 12 bridova (te kasnije imenovati strane kocke).



Slika 11. Mreža kocke (Kosak i suradnici, 2014:11)



Slika 12. Prepoznavanje kocke (Kosak i suradnici, 2014:11)

U udžbenicima prvog razreda, kocka se ne uvodi kao specijalni kvadar, nego kao nezavisno tijelo. Ipak, učenici usvajaju činjenicu da je svaka kocka kvadar, analogno će usvojiti i činjenicu da je svaki kvadrat pravokutnik, ali da obrat ne vrijedi. (Zorica-Vuletić, 2000)

Prije upoznavanja pojedinih geometrijskih likova, dijete se upoznaje s pojmom lika. Kao što se vidi iz slike 13. u udžbeniku Matematičkim stazama 1 vidljiv je jedan djeci blizak i konkretan primjer – cipela označava tijelo, a otisak lik.



Slika 13. Otisak cipele (Kosak i suradnici, 2014:19)

Učenik u prvom razredu treba prepoznati, imenovati te razlikovati geometrijske likove. Promatrajući tijelo kvadra i otiskujući njegovu plohu, učenici se upoznaju s pravokutnikom.



Slika 14. Otisak kvadra (Kosak i suradnici, 2014:22)

Na isti način učenici dolaze do pojma kvadrata, promatrajući model kocke i otiskujući plohe kocke, učenik treba uočiti da su strane kocke kvadrati.



Slika 15. Otisak kocke (Kosak i suradnici, 2014:23)

2.2. Drugi razred

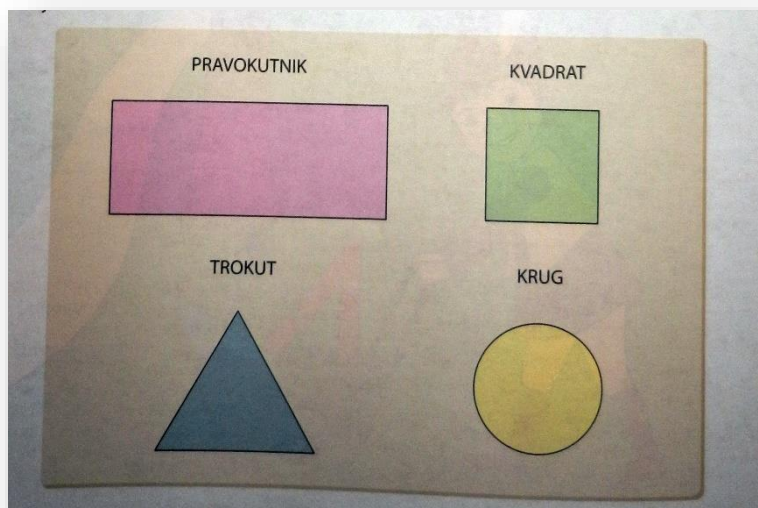
U drugom razredu osnovne škole, geometrijski sadržaji koji se obrađuju vezani su uz pojam dužine. U nastavnoj cjelini Dužina, učenici obrađuju dužinu kao spojnicu dviju različitih točaka

te stranice kvadrata, pravokutnika i trokuta. Učenik dužinu definira kao najkraću ravnu crtu između dviju točaka. Te točke naziva krajnjim točkama dužine.

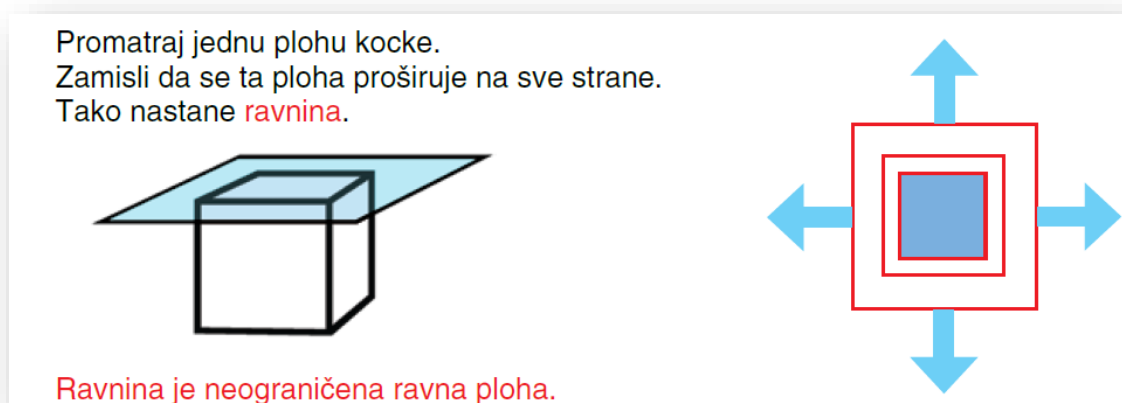
Što se tiče obrazovnih postignuća koja su vezana uz pojam četverokuta, učenik bi trebao znati označiti stranice kvadrata i pravokutnika kao dužine. Otiskujući stranu kvadra i kocke, učenik je upoznao pojam pravokutnika i kvadrata. Dakle, pravokutnik učenik upoznaje kao stranu kvadra, a kvadrat kao stranu kocke. Učenik je od poznatih pojmova – geometrijskih tijela došao do novih pojmova – geometrijskih likova. Analogno tome, može se uvesti i pojam stranice geometrijskog lika. Stranica pravokutnika ili kvadrata jest dužina. U drugom razredu osnovne škole, važno je da učenik osim definiranja pravokutnika kao strane kvadra te kvadrata kao strane kocke zna i neka karakteristična svojstva tih pojmova. Tako će učenici brojanjem zaključiti da i pravokutnik i kvadrat imaju četiri vrha i četiri stranice. U ovom razredu, rubovi pravokutnika i kvadrata mogu se interpretirati i kao zatvorene izlomljene crte.

2.3. Treći razred

U udžbeniku za treći razred osnovne škole – *Matematičkim stazama 3*, tri cjeline objedinjene su pod jednim nazivom – geometrija. Cjelina *Pravac u ravnini* počinje upoznavanjem ravnine i likova u ravnini. *Ravnina je neomeđena ravna ploha. Sve što je nacrtano na listu papira pripada ravnini koju taj list predočuje. Svaka točka, svaka crta koju nacrtamo pripada toj ravnini. I sve ostale točke na tom listu koje nismo posebno označili također pripadaju toj ravnini.* (Kosak i suradnici, 2014:80) Dakle, učenik treba spoznati ravninu kao neograničenu ravnu plohu i likove kao dijelove ravnine.



Slika 16. Likovi u ravnini (Kosak i suradnici, 2014:80)



Slika 17. Ravnina (Jagodić i Mrkonjić, 2014:69)

Nakon cjeline Pravac u ravnini učenici se upoznaju s mjerenjem dužine. Nakon što su naučili nacrtati dužinu te je označiti, upoznat će se i s mjerenjem dužina. Učenici će upoznati mjerene jedinice i naučiti kako ih skraćeno zapisivati. Ovo znanje omogućit će učeniku da razlikuje jedinične dužine veće i manje od 1 metra, određivati koje udaljenosti mjerimo većim mjernim jedinicama, a koje manjim te savladati preračunavanje mjernih jedinica. Vrlo je važno da učenici shvate razliku između duljine i dužine. Svaka dužina ima svoju duljinu.

U cjelini međusobni odnosi dvaju pravaca u ravnini, učenici upoznaju pravce koji se sijeku, usporedne pravce te okomite pravce. Učenik treba znati crtati i razlikovati navede pravce, dakle

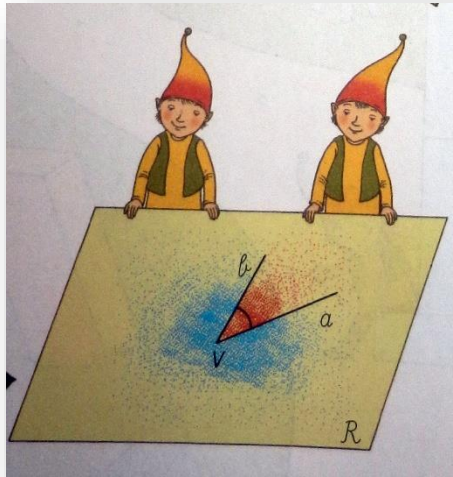
u ovom razredu učenici uče kako nacrtati usporedne i okomite pravce što je temelj za učenje konstrukcija geometrijskih likova. U udžbeniku za treći razred osnovne škole – Matematičkim stazama 3, nakon ovih sadržaja učenici se upoznaju s prenošenjem dužina pomoću šestara, što učvršćuje temelje za gradivo koje dolazi u četvrtom razredu.

2.4. Četvrti razred

Geometrijski sadržaji u nastavi matematike najbogatiji su u četvrtom razredu osnovne škole. Kao i u prethodnom razredu i ovdje su sadržaji raspoređeni u tri cjeline koje su u udžbeniku Matematičkim stazama također objedinjene pod nazivom Geometrija. Prije svega učenik ponavlja pojam ravnine kao neograničene plohe, što se vidi iz slike 18., a nakon toga slijedi definiranje kuta.

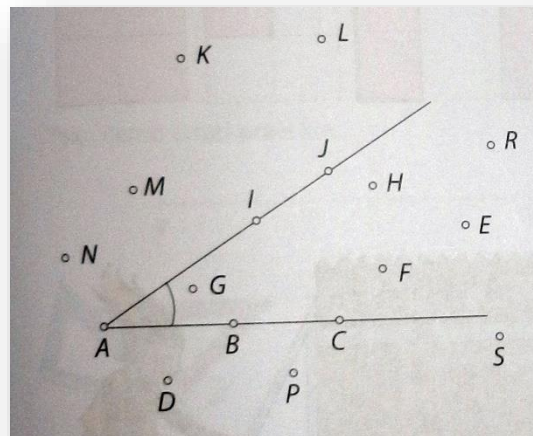


Slika 18. Ravnina (Kosak i suradnici, 2014:82)



Slika 19. Kut (Kosak i suradnici, 2014:82)

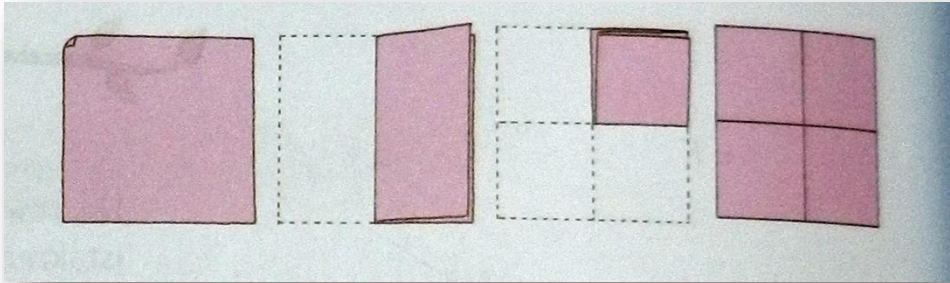
Dio ravnine omeđen dvama polupravicima s istom početnom točkom nazivamo kut. (Kosak i suradnici, 2014:82) Ta početna točka je vrh kuta, svaki polupravac naziva se krak kuta. Učenik treba shvaćati kut kao dio ravnine omeđen polupravicima te crtati, imenovati i označavati vrh i krakove kuta.



Slika 20. Pripadnost točkaka kutu (Kosak i suradnici, 2014:83)

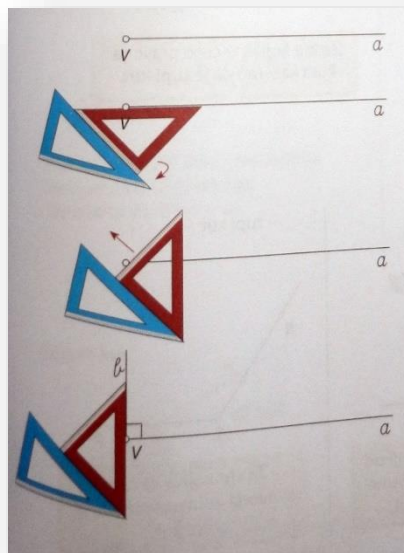
Kao što se vidi iz slike 20., prikladnim grafičkim prikazom objašnjavaju se pojmovi pripadnosti, odnosno nepripadnosti točkaka kutu. Učenik dolazi do pojmovan vanjske, unutarnje i rubne točke kuta.

Obzirom na to da su učenici u prethodnom razredu naučili crtati okomite pravce, sada se počinje s obradom pravog kuta. Za početak, učenik list papira presavije dva puta kako prikazuje slika 21. i dobije četiri prava kuta.



Slika 21. Presavijanje papira (Kosak i suradnici, 2014:84)

Uputimo učenike da promotre kutove i „crte“ na papiru koje su dobili presavijanjem. Kada shvate da su okomite, slijedi uvođenje pojma pravog kuta. Učenik definira pravi kut kao kut kojemu su krakovi međusobno okomiti te usvaja oznaku za pravi kut. Zatim se učenici prisjećaju na koji način su u trećem razredu konstruirali okomite pravce, na taj način uče crtati i pravi kut što se vidi iz slike 22.





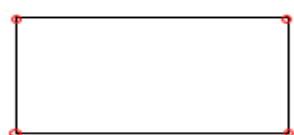
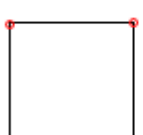
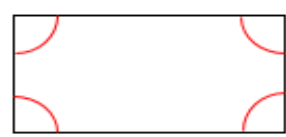
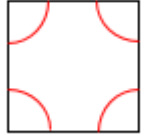
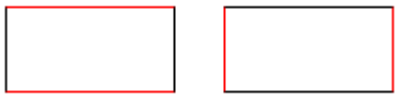
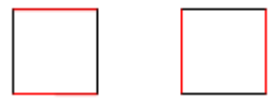
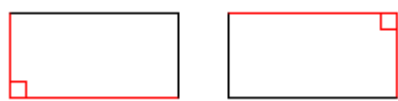



Slika 22. Crtanje pravog kuta (Kosak i suradnici, 2014:85)

Do pojma šiljasti i tupi kut dolazimo pomoću pravog kuta. Učenici su u prvom razredu usvojili relaciju veći-manji, stoga ćemo uspoređivanjem veličina kutova početi s obradom šiljastog i tupog kuta.

Učenici su već u prvom razredu upoznali geometrijske likove na način da su pojedini geometrijski lik imenovali i razlikovali od ostalih likova. U drugom razredu su, obrađujući izlomljenu crtu, crtali pojedine geometrijske likove, dok u trećem razredu upoznaje likove kao dijelove ravnine. U četvrtom razredu učenik treba prepoznati, razlikovati i crtati pravokutnik i kvadrat, označavati stranice, vrhove i kutove te razumjeti i izračunati opseg i površinu.

Tablica 2. Pravokutnik i kvadrat(Kosak i suradnici, 2014:95)

	PRAVOKUTNIK	
		
STRANICE		
VRHOVI		
KUTOVI		
NASUPROTNE STRANICE		
SUSJEDNE STRANICE		

Pravokutnik su upoznali kao dio ravnine i usvojili činjenicu da je svaki kvadrat pravokutnik, ali da obrat ne vrijedi. U četvrtom razredu učenik upoznaje elemente četverokuta, odnosno pravokutnika. Učenik treba usvojiti da pravokutnik ima četiri vrha, stranice i kuta. Nasuprotne stranice pravokutnika su paralelne, što ujedno znači da su i jednake duljine, odnosno da su sukladne. Učenik uočava da su sva četiri kuta pravokutnika pravi kutovi i to povezuje s nazivom pravokutnika.

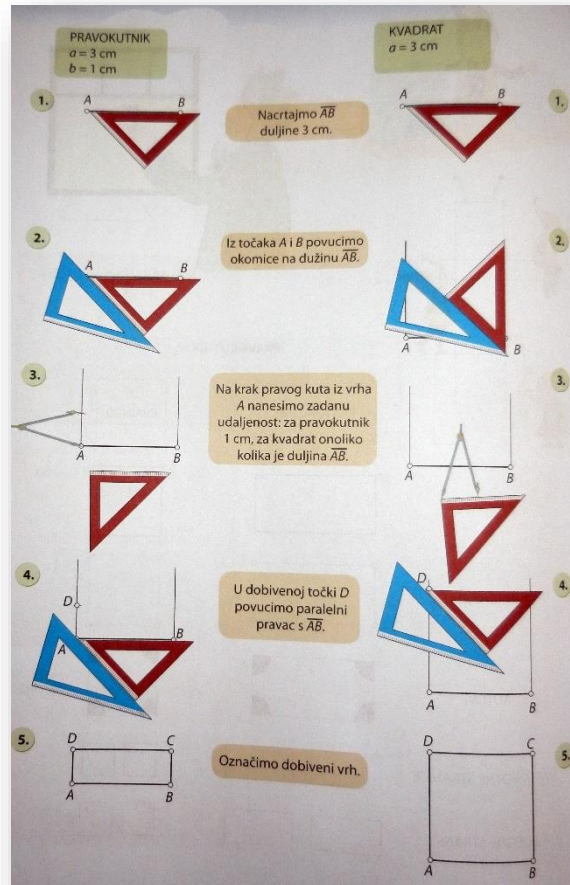
Na taj način definiramo pravokutnik na sljedeći način.

Definicija 6. Četverokut koji ima sva četiri kuta prava naziva se pravokutnik.

Nadalje, učenik promatra kvadrat. Primjenjuje činjenicu da je svaki kvadrat pravokutnik, ali uočava da su sve stranice kvadrata jednake duljine, stoga definira kvadrat.

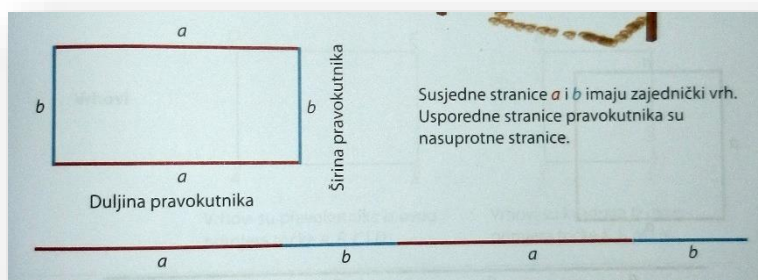
Definicija 7. Pravokutnik kojemu su sve stranice jednake duljine zovemo kvadrat.

Sljedeće što učenik treba jest nacrtati kvadrat i pravokutnik. U prvom razredu učenici su koristili priložene šablone, no sada uče kako konstruirati lik pomoću geometrijskog pribora. Pravi kut znaju već konstruirati, a sada primjenjuju i znanje stečeno u trećem razredu o prenošenju dužina šestarom, što je vidljivo iz slike 23.



Slika 23. Crtanje pravokutnika i kvadrata (Kosak i suradnici, 2014:96)

U prethodnim razredima učimo zbrajati duljine, dakle zbroje mjerne brojeve duljina, a oznaku za jediničnu duljinu samo prepisu. Sada trebaju shvatiti da se matematički pojam opsega određuje kao zbroj duljina stranica nekog lika. Potrebno je ponoviti da vrhove pravokutnika i kvadrata označavamo velikim slovima, stranice malim slovima te da ta ista slova zamjenjuju i duljine stranica. Opseg pravokutnika definiramo kao dvostruki zbroj duljina dviju susjednih stranica, što se vidi i iz slike 24.



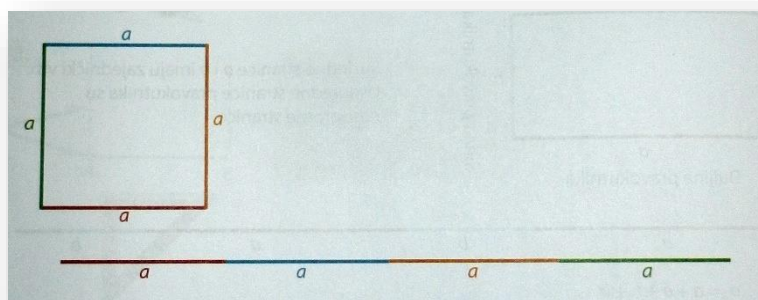
Slika 24. Opseg pravokutnika (Kosak i suradnici, 2014:97)

Formulu za opseg pravokutnika zapisujemo:

$$o = a + b + a + b$$

$$o = 2a + 2b$$

$$o = 2(a + b)$$



Slika 25. Opseg kvadrata (Kosak i suradnici, 2014:98)

Kvadrat je pravokutnik, stoga primjenjujemo isto pravilo. Opseg kvadrata jest zbroj duljina svih njegovih stranica. Pošto kvadrat ima sve stranice jednake duljine, formulu za opseg zapisujemo:

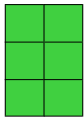
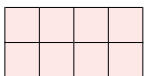

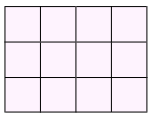
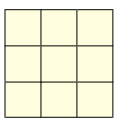
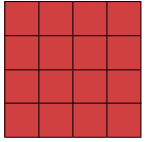
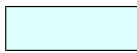

$$o = a + a + a + a$$

$$o = 4a$$

Pri usvajanja pojma opsega, ne bi trebalo izostaviti usporedbu crteža lika s formulom, čime se izbjegava formalističko usvajanje pojma opsega, posebno odgovarajuće formule. Metodički postupak se treba organizirati na način da učenik promatra lik, a formulu usvaja postupno. Dakle, ovaj metodički postupak sastoji se od toga da se geometrijski objekt uspoređuje s formulom koja odražava određene odnose u tom geometrijskom objektu. (Ovčar, 1990.)

Učenike treba kroz računanje opsega pravokutnika različitih duljina stranica dovesti do zaključka da je opseg pravokutnika jednak dvostrukom zbroju duljina stranica (Tablica 3.)

Tablica 3. Opseg pravokutnika i kvadrata


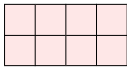

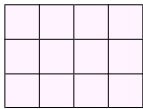
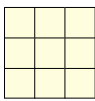
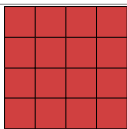


Modeli	a (cm)	b (cm)	Opseg zbrajanjem jediničnih duljina stranica	Formula za opseg
	2	3	10	$2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 2 \cdot (2+3)$
	4	2	12	$2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 2 \cdot (4+2)$
	2	2	8	$2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 2 \cdot (2+2)$
	4	3	14	$2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 2 \cdot (4+3)$
	3	3	12	$2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 2 \cdot (3+3)$
	4	4	16	$2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 2 \cdot (4+4)$
	a	b	-	$O = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ $O = 2 \cdot (a+b)$
	a	a	-	$O = 4 \cdot a$

Nakon opširnijeg upoznavanja pravokutnika i kvadrata, slijedi mjerenje površina kao uvod u računanje površine pravokutnika i kvadrata. Učenik treba znati računati površinu kvadrata i pravokutnika te poznavati mjere za površinu.

Kroz prebrojavanje jediničnih kvadrata učenik dolazi do površine pravokutnika i kvadrata zadanih duljina stranica te tako dolazi do formule za površinu pravokutnika, odnosno kvadrata. Površina pravokutnika jednaka je umnošku duljina njegovih susjednih stranica i zapisujemo je

$P = a \cdot b$. Analogno površini pravokutnika, površina kvadrata jednaka je umnošku duljine stranice sa samom sobom i zapisujemo je $P = a \cdot a$.

Tablica 4. Površina pravokutnika i kvadrata

Modeli	Površina prebrojavanjem jediničnih kvadrata	a (cm)	b (cm)	Otkriće formule $P = a \cdot b$
	6	2	3	$6=2 \cdot 3$
	8	4	2	$8=4 \cdot 2$
	4	2	2	$4=2 \cdot 2$
	12	4	3	$12=4 \cdot 3$
	9	3	3	$9=3 \cdot 3$
	16	4	4	$16=4 \cdot 4$
	-	a	b	$P = a \cdot b$
	-	a	a	$P = a \cdot a$

3. KVADRAT I PRAVOKUTNIK U ZADACIMA S NATJECANJA

3.1. Natjecanja iz matematike u Republici Hrvatskoj

Svake godine Hrvatsko matematičko društvo u suradnji s Agencijom za odgoj i obrazovanje i Ministarstvom znanosti, obrazovanja i športa organizira natjecanja iz matematike za osnovne i srednje škole. Natjecanja se organiziraju na četiri razine – školska, općinska/gradska, županijska te regionalna/državna. Od učenika razredne nastave sudjeluju samo učenici četvrtih razreda. Oni sudjeluju na školskim, općinskim/gradskim te županijskim natjecanjima. Učenici koji su pozvani na županijsko natjecanje, natječu se u rješavanju problemskih zadataka koje je pripremila Državno povjerenstvo.

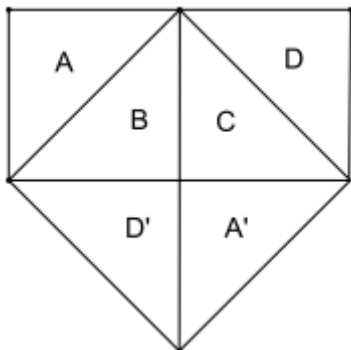
Zadatak 1.²

Duljina jedne stranice pravokutnika je dva puta veća od druge stranice. Rastavi pravokutnik na dijelove od kojih možeš sastaviti kvadrat. Objasni postupak!

Rješenje:



Pravokutnik podijelimo na dva jednaka kvadrata, zatim svaki kvadrat na dva jednaka trokuta. Na takav način dobijemo četiri jednaka pravokutna trokuta (A, B, C i D). Dva trokuta zadržimo u pravokutniku, a preostala dva premjestimo na drugu stranu tako da tvore kvadrat.

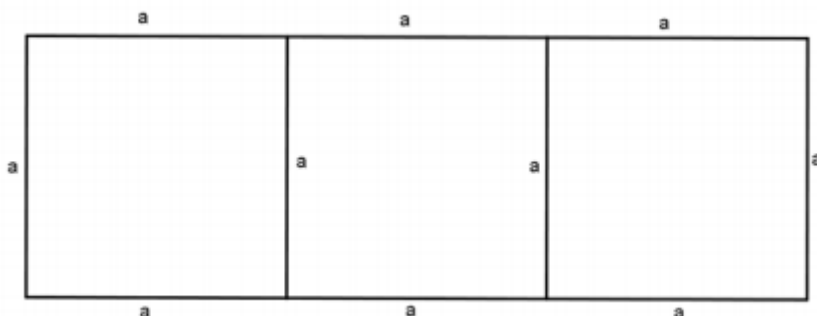


² Županijsko natjecanje iz matematike, 2009., pribavljeno 19.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/1013/9013/9634/2009_ZN_OS_zadaci.pdf

Zadatak 2.³

Pravokutnik je s dva paralelna pravca podijeljen na 3 jednaka kvadrata. Odredi koliko puta je opseg pravokutnika veći od opsega jednog kvadrata.

Rješenje:



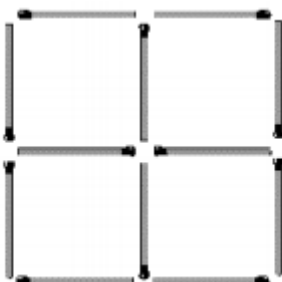
Opseg pravokutnika iznosi $2(3a+a)=8a$.

Opseg kvadrata iznosi $4a$.

Zato je opseg pravokutnika 2 puta veći od opsega jednog kvadrata.

Zadatak 3.⁴

Lik na slici napravljen je od 12 šibica.



Ukloni dvije šibice tako da ostanu:

a) 3 kvadrata

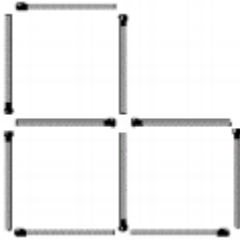
³ Županijsko natjecanje iz matematike, 2010., pribavljeno 19.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/6613/7718/0847/2010_ZN_OS_zadaci.pdf

⁴ Školsko/gradsko natjecanje iz matematike, 2011., pribavljeno 19.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/5313/7502/4201/2011_ON_OS-zadaci.pdf

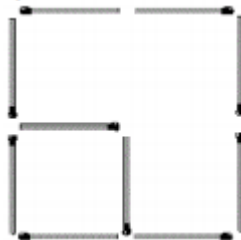
b) 2 kvadrata

Rješenje:

a)

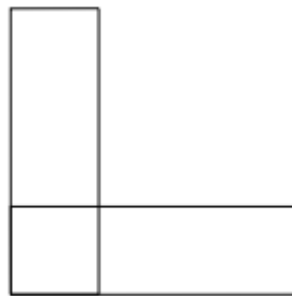


b)



Zadatak 4.⁵

Od dva pravokutnika čije su duljine stranica 13 cm i 4 cm djelomičnim preklapanjem dobiven je lik u obliku slova L (kao na slici). Izračunaj opseg tako dobivenog lika.



Rješenje:

Preklopljen je kvadrat stranice 4 cm.

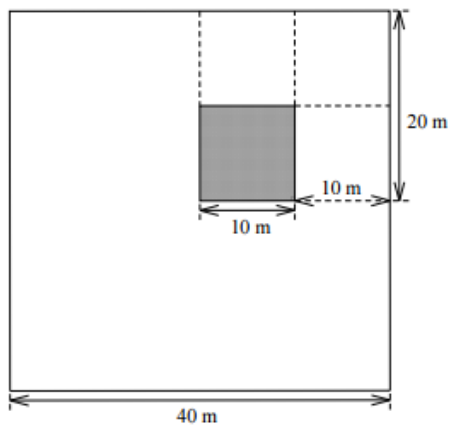
Opseg dobivenog lika u centimetrima je:

$$13 + 4 + (13 - 4) + (13 - 4) + 4 + 13 = 52$$

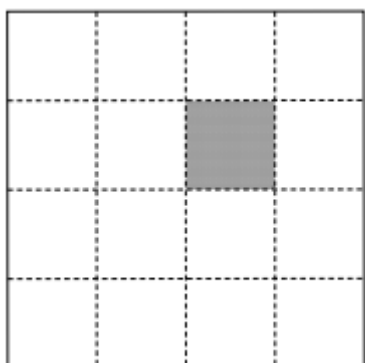
⁵ Županijsko natjecanje iz matematike, 2011., pribavljeno 19.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/6713/7502/4441/2011_ZN_OS_zadaci.pdf

Zadatak 5.⁶

Na slici je vrt oblika kvadrata stranice duljine 40 m. Osjenčani dio tog vrta zauzima kućica kvadratnog oblika. Preostali dio vrta treba podijeliti na 5 dijelova jednakog oblika i jednake površine.

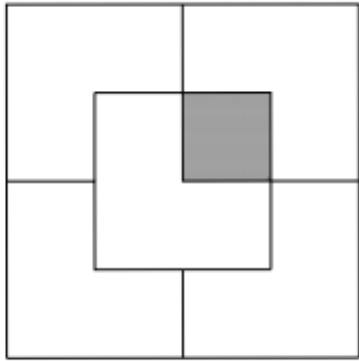


Rješenje:



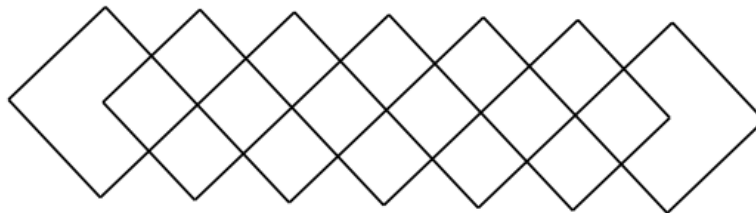
Svaki dio sastavljen je od 3 mala kvadrata, odnosno $(16 - 1) : 5 = 3$.

⁶ Županijsko natjecanje iz matematike, 2011., pribavljeno 19.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/6713/7502/4441/2011_ZN_OS_zadaci.pdf



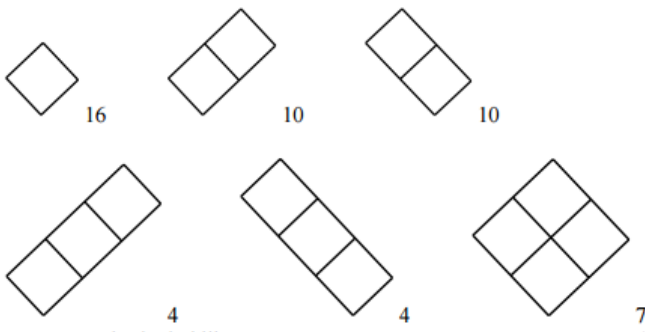
Zadatak 6.⁷

Koliko je ukupno pravokutnika na slici?



Rješenje:

Oblici koji se javljaju i njihov broj ponavljanja:



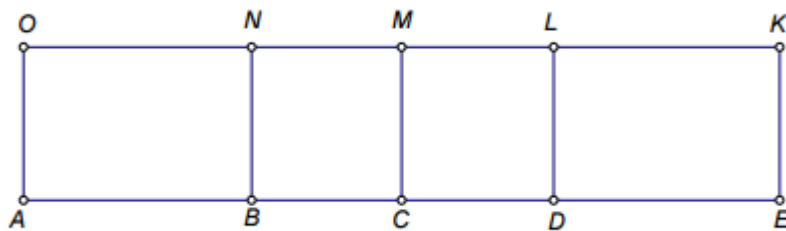
Ukupno je pravokutnika: $16+10+10+4+4+7=51$.

Zadatak 7.⁸

Ispiši sve pravokutnike sa slike.

⁷ Županijsko natjecanje iz matematike, 2012., pribavljeno 19.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/1313/7502/2776/2012_ZN_OS_zadaci.pdf

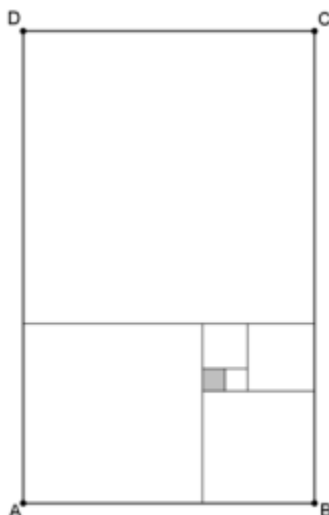
⁸ Školsko/gradsko natjecanje iz matematike, 2015., pribavljeno 28.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/1214/2462/1020/zadaci_ON_2015.pdf



Rješenje: ABNO, ACMO, ADLO, AEKO, BCMN, BDLN, BEKN, CDLM, CEKM, DEKL

Zadatak 8.⁹

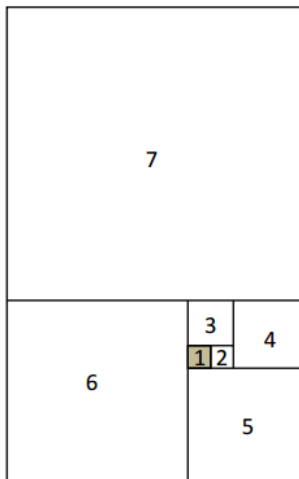
Pravokutnik ABCD podijeljen je na 7 kvadrata kao na slici. Koliki su opseg i površina pravokutnika ABCD ako je duljina stranice osjenčanog kvadrata jednaka 1 cm?



Rješenje:

Označimo kvadrate brojevima od 1 do 7.

⁹ Županijsko natjecanje iz matematike, 2015., pribavljeno 28.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/6814/2504/6064/zupanijsko_2015-zadaci.pdf



Kvadrat 2 ima zajedničku stranicu s kvadratom 1 što znači da mu je stranica duljine 1 cm.

Kvadrat 3 ima stranicu duljine $1 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$.

Kvadrat 4 ima stranicu duljine $1 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$.

Kvadrat 5 ima stranicu duljine $1 \text{ cm} + 1 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$.

Kvadrat 6 ima stranicu duljine $2 \text{ cm} + 1 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$.

Kvadrat 7 ima stranicu duljine $3 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 13 \text{ cm}$.

Pravokutnik ima stranice duljina 13 cm i $8 \text{ cm} + 13 \text{ cm} = 21 \text{ cm}$.

Opseg pravokutnika je $2 \cdot 13 \text{ cm} + 2 \cdot 21 \text{ cm} = 26 \text{ cm} + 42 \text{ cm} = 68 \text{ cm}$.

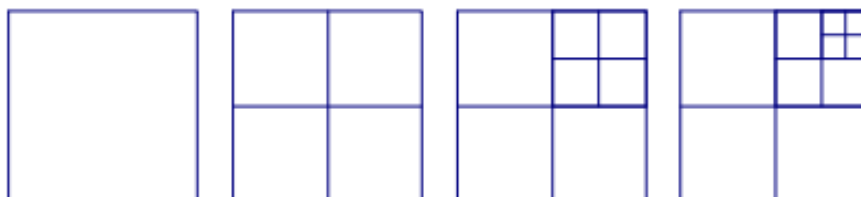
Površina pravokutnika je $13 \text{ cm} \cdot 21 \text{ cm} = 273 \text{ cm}^2$.

3.2. Matematički klokan

„Klokani bez granica“ međunarodna je udruga koja okuplja velik broj europskih država. Cilj ove udruge jest popularizirati matematiku, a glavna zadaća je organizacija igre „Matematički klokan“ pod motom bez selekcije, eliminacije i finala. Natjecanje se organizira svake godine u ožujku u isto vrijeme u svim državama sudionicama. Sudionici su raspoređeni u skupine obzirom koji razred pohađaju. Učenici razredne nastave su na razini Pčelica(2. razred), Leptrić (3. razred) te Ecolier (4. i 5. razred). Test se sastoji se od 12 zadataka za skupine Pčelica i Leptrić, odnosno 24 zadatka za sve ostale skupine. Zadaci su raznovrsni i poredani od lakših k težima. Za svaki je zadatak ponuđeno pet odgovora od kojih je samo jedan ispravan.

Zadatak 1.¹⁰

Promotrimo niz kvadrata i njihovih dijelova. Kvadrati imaju 1, 4, 7, odnosno 10 dijelova.



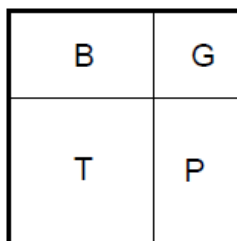
Koliko će dijelova imati sljedeći kvadrat u nizu?

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Rješenje: C) 13

Zadatak 2.¹¹

Vrt kvadratnog oblika podijeljen je na 4 dijela kao na slici: bazen (B), gredicu s cvijećem (G), tratinu (T) i pješčanik (P). Tratina i gredica su kvadratnog oblika. Opseg tratine je 20 m, a opseg gredice 12 m. Koliki je opseg bazena?



- A) 10 m B) 12 m C) 14 m D) 16 m E) 18 m

Rješenje: D) 16 m

¹⁰ Matematički klokan, 2008., pribavljeno 20.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/9513/9066/2125/E_2008_zad.pdf

¹¹ Matematički klokan, 2008., pribavljeno 20.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/9513/9066/2125/E_2008_zad.pdf

Tratina i gredica kvadratnog su oblika, duljina stranice tratine je 5 m (20 : 4), a gredice 3 m (12 : 4). Duljine stranica bazena su 5 i 3 m. Kako je bazen pravokutnog oblika, njegov opseg je $2 \cdot (5 + 3) = 2 \cdot 8 = 16$ m.

Zadatak 3.¹²

U svom vrtu Antonio je napravio uzorak kao na slici, koristeći 18 pravokutnika sa stranicama duljina 4 dm i 6 dm. Antonio je nacrtao crnu liniju spajajući središta tih pravokutnika. Koliko je duga crna linija?



- A) 80 dm B) 86 dm C) 90 dm D) 96 dm E) 100 dm

Rješenje: B) 86 dm

Crna linija sastoji se od kraćih međusobno sukladnih dužina i duljih međusobno sukladnih dužina. Kraće dužine imaju duljinu kao i kraća stranica pravokutnika, a dulje dužine kao dulja stranica pravokutnika. Duljih dužina ima 9, a kraćih 8 pa je ukupna duljina crne linije $(9 \cdot 6 + 8 \cdot 4)$ dm = 86 dm.

Zadatak 4.¹³

Duljina jedne stranice pravokutnika je 8 cm dok je druga stranica dva puta kraća. Kolika je duljina stranice kvadrata čiji je opseg jednak opsegu pravokutnika?

- A) 4 cm B) 6 cm C) 8 cm D) 12 cm E) 24 cm

Rješenje: B) 6 cm

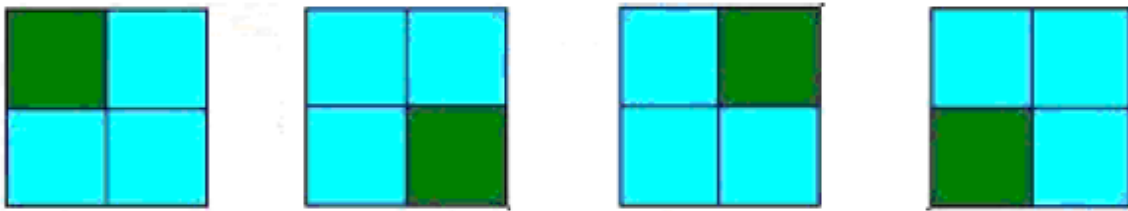
¹² Matematički klokan, 2009., pribavljeno 20.6.2015., sa <http://www.matematika.hr/files/2113/9066/1753/Ecolier091.pdf>

¹³ Matematički klokan, 2009., pribavljeno 20.6.2015., sa <http://www.matematika.hr/files/2113/9066/1753/Ecolier091.pdf>

Jedna stranica pravokutnika ima duljinu 8 cm, a druga 4 cm. Opseg pravokutnika je 24 cm. Kako i kvadrat ima jednaki opseg, duljina stranice kvadrata je 6 cm.

Zadatak 5.¹⁴

Kvadrat je podijeljen na 4 manja jednaka kvadrata. Svaki od manjih kvadrata obojen je plavom ili zelenom bojom. Na slici je primjer jednakih bojenja.



Na koliko je različitih načina moguće obojiti kvadrat?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Rješenje: D) 8

Z – zelena boja; P – plava boja

Mogućnosti bojenja kvadrata su: ZZZZ, ZZZP, ZZPP, ZPZP, ZPPP, PPPP.

Zadatak 6.¹⁵

Duljine stranica papira oblika pravokutnika su 192 mm i 84 mm. Rezanjem papira usporedno s jednom njegovom stranicom možemo odrezati kvadrat. Isti postupak nastavljamo s ostatkom papira. Kolika je duljina stranice najmanjeg kvadrata koji možemo dobiti takvim postupkom?

- A) 1 mm B) 4 mm C) 6 mm D) 10 mm E) 12 mm

Rješenje: E) 12 mm

Rezanjem početnog pravokutnika kojemu su duljine stranica 192 mm i 84 mm, usporedno s jednom njegovom stranicom (84 mm), dobit ćemo 2 kvadrata sa stranicama duljine 84 mm i

¹⁴ Matematički klokan, 2010., pribavljeno 20.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/4513/9066/1299/E_2010.pdf

¹⁵ Matematički klokan, 2012., pribavljeno 20.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/3313/7511/0822/Ecolier_rjesenja.pdf

manji pravokutnik sa stranicama duljine 84 mm i 24 mm. Rezanjem pravokutnika kojemu su duljine stranica 84 mm i 24 mm, usporedno s jednom njegovom stranicom (24 mm), dobit ćemo 3 kvadrata sa stranicama duljine 24 mm i još manji pravokutnik sa stranicama duljine 24 mm i 12 mm. Taj pravokutnik sa stranicama duljine 24 mm i 12 mm možemo razrezati na dva kvadrata sa stranicama duljine 12 mm.

Zadatak 7.¹⁶

Koja od sljedećih figura nadopunjuje figuru na desnoj strani tako da one zajedno čine pravokutnik?



A)



B)



C)



D)



E)

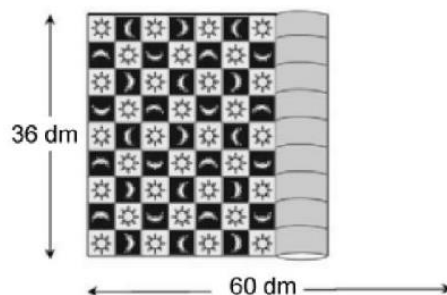
Rješenje: C)

Zadatak 8.¹⁷

Zoran je kupio sag dug 60 dm i širok 36 dm. Na površini saga vidljivi su kvadratići u kojima se nalazi mjesec ili sunce. Sa slike je vidljivo da se duž širine saga nalazi 9 kvadratića. Koliko se kvadratića ispunjenih mjesecom nalazi na površini saga kada se sag u potpunosti raširi?

¹⁶ Matematički klokan, 2013., pribavljeno 20.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/6913/7510/9214/Ecolier_rjesenja11.pdf

¹⁷ Matematički klokan, 2013., pribavljeno 20.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/6913/7510/9214/Ecolier_rjesenja11.pdf



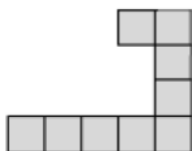
- A) 68 B) 67 C) 65 D) 63 E) 60

Rješenje: B) 67

Duljina stranice kvadratića je $36 : 9 = 4$ dm. Po dužoj stranici saga ima $60 : 4 = 15$ kvadratića. Sag ima ukupno $9 \cdot 15 = 135$ kvadratića. U 1., 3., 5., 7. i 9. retku nalazi se 7 kvadratića ispunjenih mjesecom, a u 2., 4., 6. i 8. nalazi se 8 takvih kvadratića. Broj kvadratića ispunjenih mjesecom je $5 \cdot 7 + 4 \cdot 8 = 35 + 32 = 67$.

Zadatak 9.¹⁸

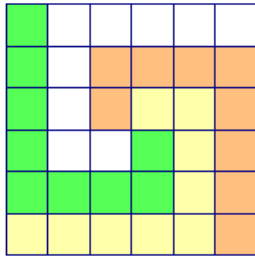
Helena ima nekoliko jednakih dijelova sastavljenih od manjih kvadrata prikazanih na slici. Koliko takvih dijelova joj je potrebno da bi složila kvadrat (u potpunosti ispunjen kvadratićima)?



- A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

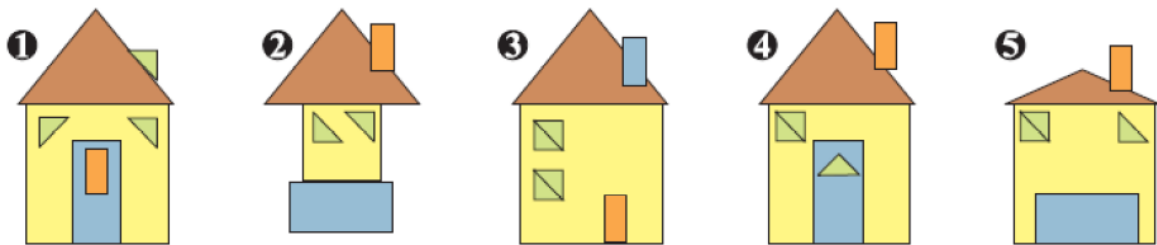
Rješenje: B) 4

¹⁸ Matematički klokan, 2013., pribavljeno 20.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/6913/7510/9214/Ecolier_rjesenja11.pdf



Zadatak 10.¹⁹

Koje su kuće izrađene od potpuno jednakih dijelova oblika trokuta i pravokutnika?

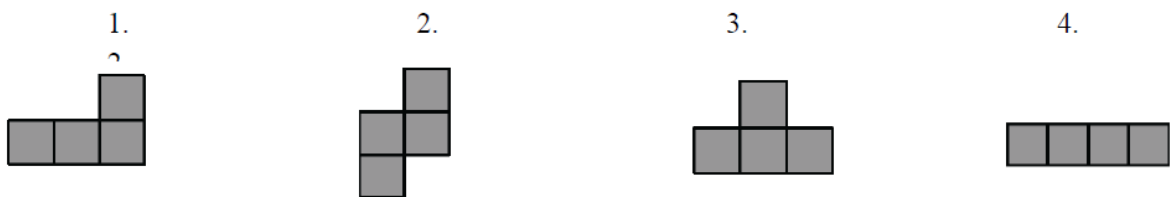


- A) 1, 4 B) 3,4 C) 1, 4, 5 D) 3, 4, 5 E) 1, 2, 4, 5

Rješenje: A) 1, 4

Zadatak 11.²⁰

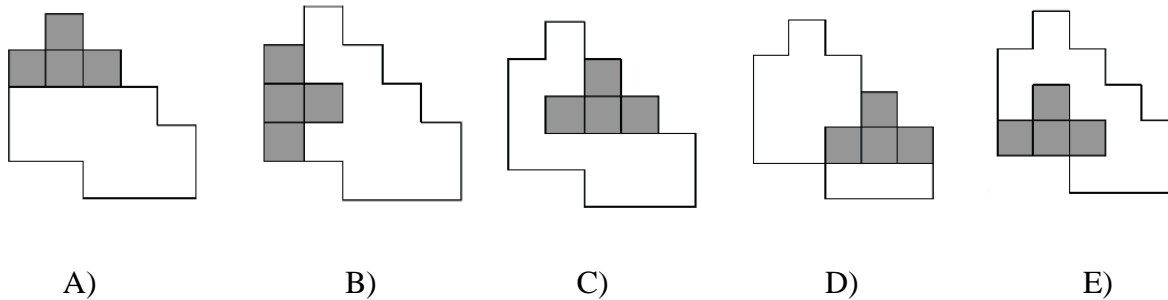
Andrea ima 4 različita dijela složena od 4 jednaka kvadratića koji su prikazani na slikama.



U koji će od oblika staviti 3. dio tako da s preostalim dijelovima u potpunosti može prekriti zadani oblik?

¹⁹ Matematički klokan, 2014., pribavljeno 20.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/3813/9832/6417/Ecolier_rjesenja.pdf

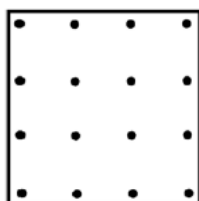
²⁰ Matematički klokan, 2014., pribavljeno 20.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/3813/9832/6417/Ecolier_rjesenja.pdf



Rješenje: C)

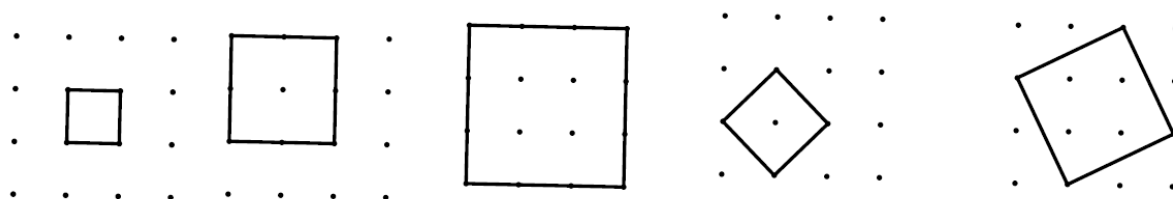
Zadatak 12.²¹

U kvadratu se nalazi 16 točaka. Udaljenosti dviju susjednih točaka u svakom redu, kao i udaljenosti dviju susjednih točaka u svakom stupcu su jednake. Spajanjem četiriju točaka može se nacrtati kvadrat. Koliko kvadrata različitih površina se može nacrtati?



- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

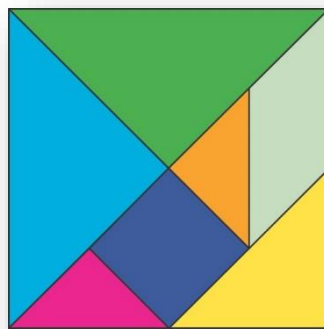
Rješenje: D) 5



²¹ Matematički klokan, 2015., pribavljeno 20.6.2015., sa http://www.matematika.hr/files/6714/2954/9102/RJEENJA_KLOKAN_E_2015.pdf

4. TANGRAM - PRIMJER AKTIVNOSTI NAMIJENJENE RAZVOJU GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA I PROSTORNOG ZORA

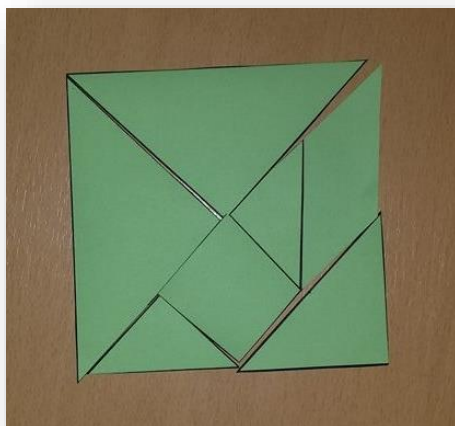
Tangram je drevna kineska slagalica koja se sastoji od sedam dijelova, odnosno tanova. Sastoji se od pet jednakokranih pravokutnih trokuta, jednog kvadrata i jednog paralelograma, što je vidljivo iz slike 26. Primjena tangrama u nastavi matematike je raznolika. Sastavljajući određeni lik, učenici dijelove tangrama zakreću, postavljaju u različite položaje te uočavaju njihova geometrijska svojstva potrebna za slaganje zadanog lika. Na ovakav način učenici stječu iskustvo koje je potrebno za prelazak na van Hiele-ovu razinu analize. (Čizmešija i suradnici, 2010) Najveća prednost tangrama u nastavi matematike je ta što učenici uče kroz igru što i jest njihova primarna aktivnost. Ciljevi ovakve jedne radionice, osim stjecanja iskustva za prelazak na razinu analize jesu i razvijanje interesa za matematiku te usvajanje sadržaja na zabavan način.



Slika 26. Tangram

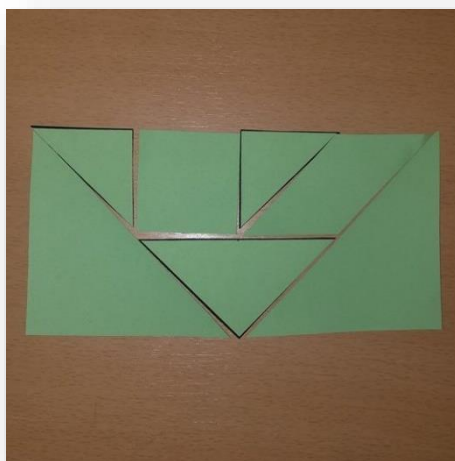
4.1. Radionica „Tangram“

U uvodnom dijelu upoznala sam učenike s tangramom. Ispričala sam im legendu o nastanku tangrama, a nakon toga je svaki učenik dobio jedan tangram i njihov zadatak bio je složiti jedan kvadrat. Ponovili smo što je kvadrat, te kako glase opseg i površina. Napomenula sam da moraju iskoristiti svih sedam dijelova tangrama pri slaganju lika te da se dijelovi ne smiju preklapati, ali da ih mogu okretati.



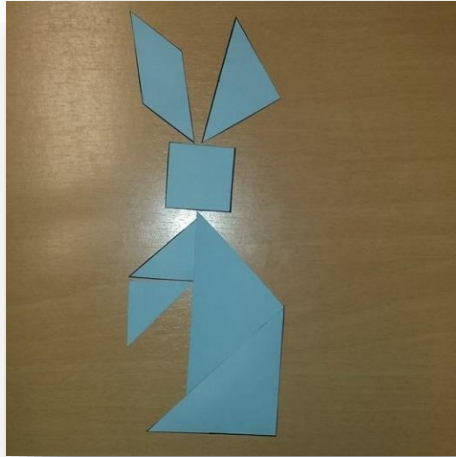
Slika 27. Složen kvadrat

Nakon što su učenici složili kvadrate, uslijedila je analiza dijelova tangrama. Tako su učenici rekli od kojih se likova sastoji tangram te koji su među njima sukladni. Usporedili smo i površine svih dijelova tangrama na način da smo površinu najmanjeg trokuta označili slovom P. Postupno smo došli do zaključka da je ukupna površina tangrama šesnaest puta veća od površine najmanjeg trokuta. Uslijedio je zadatak slaganja pravokutnika. Prije slaganja ponovili smo što je pravokutnik te opseg i površinu.

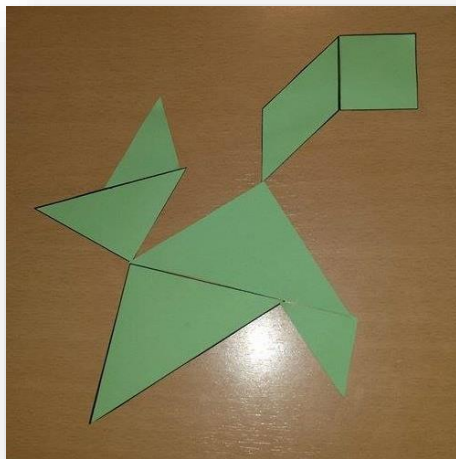


Slika 28. Složen pravokutnik

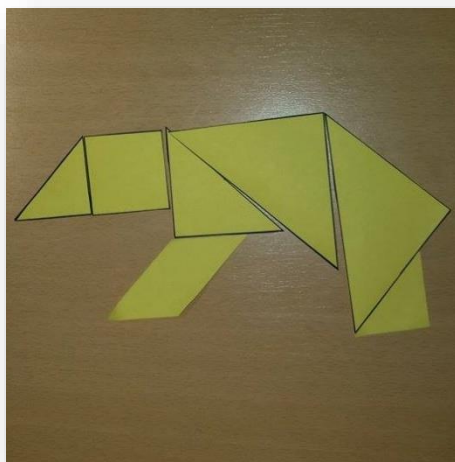
Kada su učenici složili pravokutnike, ispričala sam im da se vjeruje da je tangram nekada služio kako bi se ispričala priča. Pročitala sam im priču Nezadovoljni zec, a oni su slagali likove.



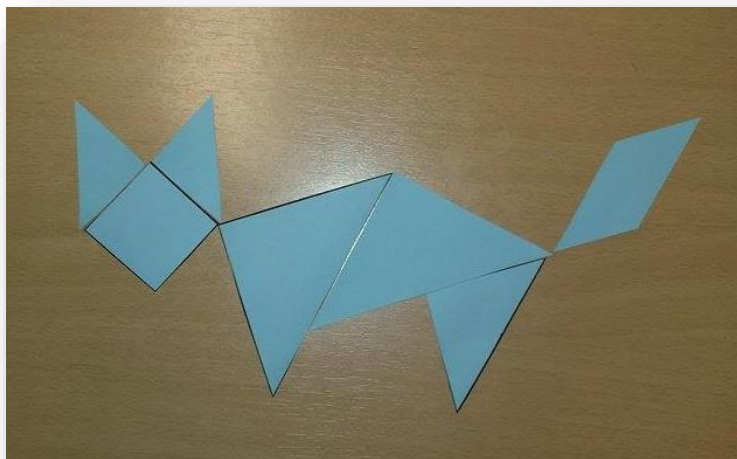
Slika 29. Zec



Slika 30. Vjeverica



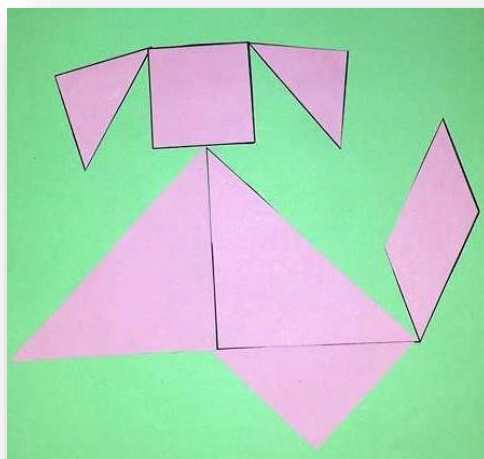
Slika 31. Medvjed



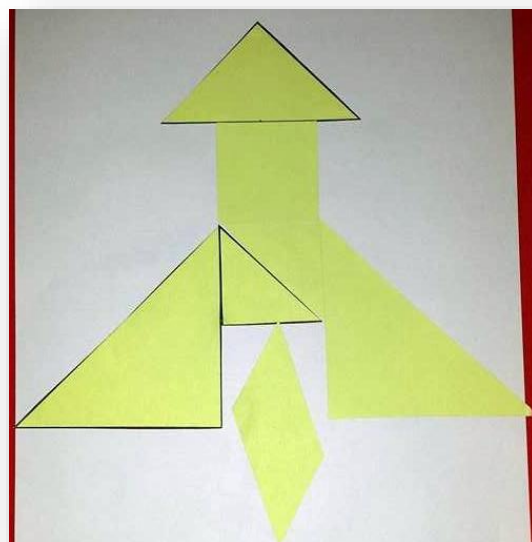
Slika 32. Lisica

Nakon svih složenih likova iz priče, zadala sam učenicima jedan tematski prilagođen zadatak koji sadrži izoperimetrijski problem. Još jednom smo ponovili što je pravokutnik, opseg i površinu te kvadrat i njegov opseg i površinu. Učenici su zaključili da od svih pravokutnika zadanog opsega kvadrat ima najveću površinu.

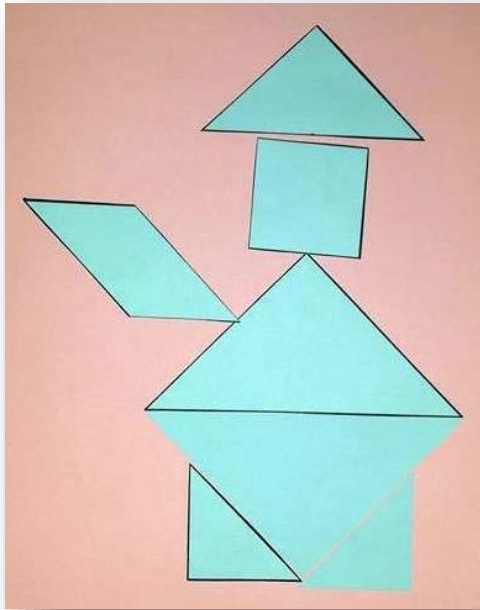
Za kraj je svaki učenik trebao složiti od dijelova tangrama svoj lik te mu dati naziv.



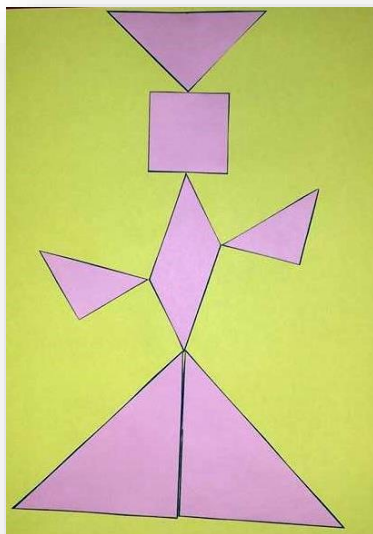
Slika 33. Psić, učenički rad



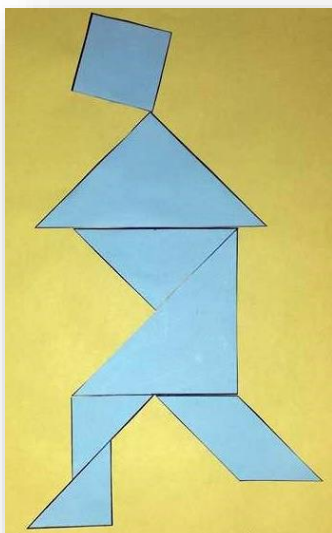
Slika 34. Raketa, učenički rad



Slika 35. Navijač, učenički rad

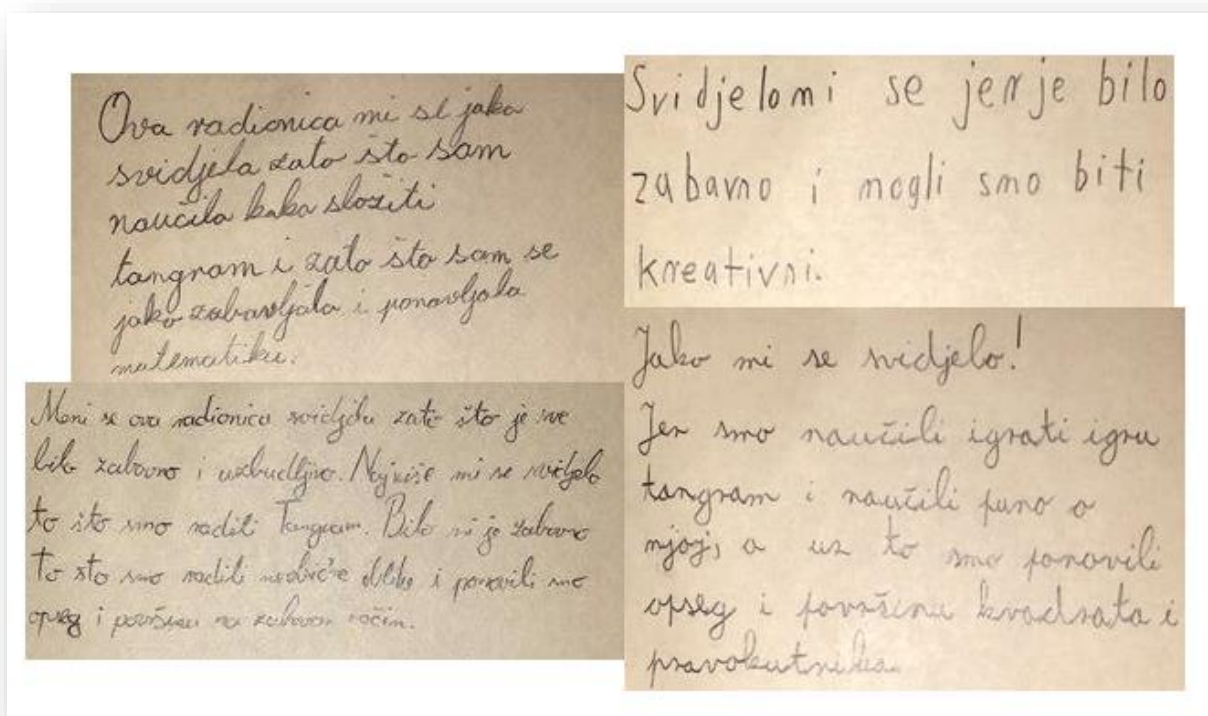


Slika 36. Kraljica, učenički rad



Slika 37. Trkač, učenički rad

Iako su se učenici prvi put susreli s tangramom, jako brzo su se snašli. Svima se radionica iznimno svidjela, posebno što su na zabavan način ponovili opseg i površinu kvadrata i pravokutnika. Istaknuli su da im se svidjelo i to što su trebali razmišljati i na kraju biti kreativni, što se vidi iz slike 38.



Slika 38. Komentari učenika

5. ZAKLJUČAK

Svaki učenik ima sposobnosti koje su dovoljne za praćenje, savladavanje i usvajanje matematičkih sadržaja propisanih nastavnim programom, ali uspješnost tog procesa ovisi o nekoliko čimbenika. Matematički sadržaji moraju biti primjereni uzrastu učenika, udžbenici i vježbenice moraju biti sustavno osmišljeni, izvođenje nastave mora biti kvalitetno, potrebna je i sklonost učenika prema matematici te kontinuirani rad.(Kurnik, 2001) Geometrija je svuda oko nas, gdje god se okrenemo, konkretna je i baš zbog toga jedna je od omiljenih grana matematike. Nastava geometrije, upravo zbog svoje konkretnosti, protkana je nizom metodičkih prilika u kojima učitelj svog učenika može učini aktivnim sudionikom nastavnog procesa, učenik istražuje, uči iskustvom, a znanja stečena na takav način daleko se trajnije zadržavaju. Osim što aktivnosti trebaju biti usmjerene učenikovo razini, one trebaju biti i usmjerene njihovom podizanju na sljedeću razinu. Iz razreda u razred, učenik jednim sustavnim putem nadograđuje pojmove. Postupno uči analizirati, sintetizirati, generalizirati, specijalizirati, apstrahirati, konkretizirati, inducirati i deducirati. Još jednom se pokazalo da djeca s najvećom radošću uče kroz igru. Aktivnostima poput tangrama, svakako možemo privući učenikovu pažnju, zainteresirati ga te razvijati ljubav prema geometriji, ljubav prema onom što ga okružuje.

6. LITERATURA

1. Čižmešija, A., Svedrec, R., Radović, N., Soucie, T. (2010). Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nižim razredima osnovne škole. U P. Mladnić i R. Svedrec (ur.), Zbornik radova 4. Kongresa nastavnika matematike (143-162). Zagreb: HMD i Školska knjiga
2. Haith, M. M., Miller, S. A., Vasta, R. (1998). Kognitivni razvoj: Piagetovski pristup. U K. Matešić. (ur.) Dječja psihologija: Moderna znanost (253-299). Jastrebarsko: Naklada Slap.
3. Jagodić, B., Mrkonjić, I. (2014). Naša matematika 3 udžbenik za treći razred osnovne škole. Zagreb: Školske novine. Pribavljeno 1.7.2015., sa http://issuu.com/skolskenovine/docs/mat_3_u_za_web
4. Kosak, N., Manzoni, Ž., Marjanović, I. i Paić, G. (2014). Matematičkim stazama 1 udžbenik matematike u prvom razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.
5. Kosak, N., Manzoni, Ž., Marjanović, I. i Paić, G. (2014). Matematičkim stazama 2 udžbenik matematike u drugom razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.
6. Kosak, N., Manzoni, Ž., Marjanović, I. i Paić, G. (2014). Matematičkim stazama 3 udžbenik matematike u trećem razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.
7. Kosak, N., Manzoni, Ž., Marjanović, I. i Paić, G. (2014). Matematičkim stazama 4 udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole. Zagreb: Školska knjiga.
8. Kurnik, Z. (2001, listopad). Matematičke sposobnosti. Matematika i škola. Pribavljeno 6.6.2015., sa <http://mis.element.hr/fajli/145/10-02.pdf>
9. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa. (2006). Nastavni plan i program za osnovnu školu. Zagreb: Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa.
10. Pavković, B., Veljan, D. (2004). Elementarna matematika 1. Zagreb: Školska knjiga.
11. Ovčar, S. (1990). Razvijanje mišljenja u nastavi matematike. Čakovec: TIZ „Zrinski“.
12. Pavleković, M. (1997). Metodika nastave matematike s informatikom I. Zagreb: Element.
13. Pavleković, M. (1999). Metodika nastave matematike s informatikom II. Zagreb: Element.
14. Zorica-Vuletić, I. (2000). Definiranje početnih geometrijskih pojmova. Logika: stručno-metodički časopis za profesore i učenike gimnazija i srednjih stručnih škola. Pribavljeno 1.6.2015., sa <http://marul.ffst.hr/~logika/content15.htm>

Prilozi

Prilog 1.

Radionica „Tangram“

UVODNI DIO

Tangram je drevna kineska igra koja se sastoji od sedam dijelova (tanova). Riječ tangram na kineskom jeziku znači “sedam pločica mudrosti”. O nastanku tangrama zna se vrlo malo. Jedna od legendi kaže da se sluga nekog kineskog cara, noseći veoma vrijednu keramičku ploču kvadratnog oblika, spotaknuo i pao. Ploča se slomila na sedam dijelova. Pokušavajući ih složiti u kvadratni oblik, sluga je stvorio razne figure životinja, ljudi i stvari.

Među velike ljubitelje tangrama ubrajali su se Edgar Alan Po, poznati američki pisac, i Napoleon, koji je svoje dane zatočeništva na Svetoj Heleni, prikraćivao ovom igrom.

Tradicionalno, pločice tangrama izrađivale su se od kamena, kosti, gline, žada ili porculana.

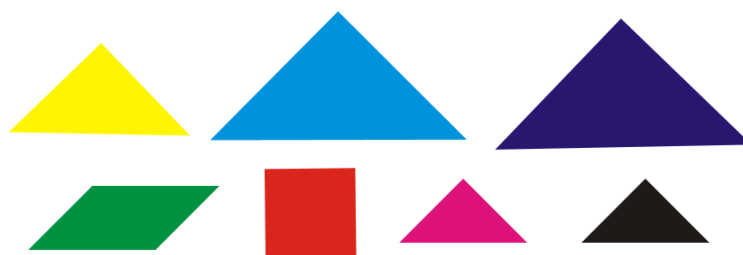
Danas se izrađuju od plastike, drveta ili tvrdog kartona.

GLAVNI DIO

Za početak, vaš zadatak je da pokušate složiti jedan kvadrat. Tko će mi reći što je kvadrat? (pravokutnik kojemu su susjedne stranice jednake duljine...) Kako računamo opseg kvadrata? (zbrojimo duljine stranica, $O=a+a+a+a$, $O=4*a$) A kako računamo površinu kvadrata? (pomnožimo duljine susjednih stranica, $P=a*a$)

Morate iskoristiti svih sedam dijelova tangrama. Pri slaganju, likovi se ne smiju preklapati, ali ih možete okretati na drugu stranu.

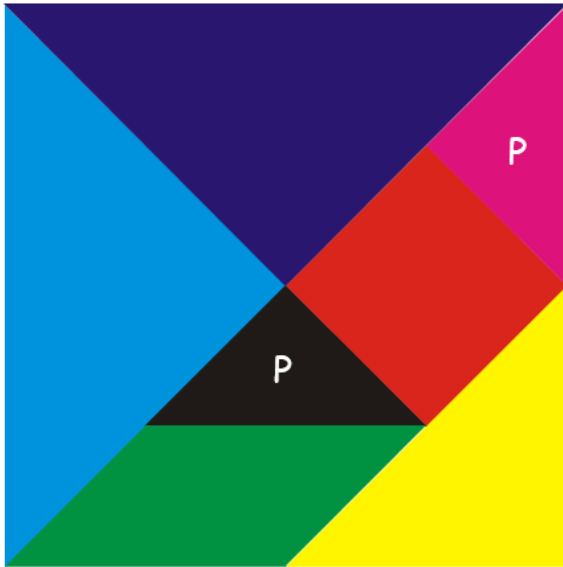
Recite mi, koje geometrijske likove prepoznajete?



Trokut, kvadrat, paralelogram. Izvrsno. Tangram se sastoji od 5 jednakokračnih pravokutnih trokuta, 1 kvadrata i 1 paralelograma.

Ima li među ovim likovima onih koji su jednaki, odnosno onih koji se podudaraju? (Ima, dva velika trokuta su jednaka i dva mala trokuta su jednaka). Tako je, ostali likovi se ne podudaraju, odnosno nisu jednaki.

Usporedimo sada površine svih dijelova tangrama. Površinu najmanjeg trokuta označit ćemo slovom P.



Pogledajte, dva mala trokuta se poklapaju s trokutom srednje veličine. Što možemo zaključiti, kakva je površina srednjeg trokuta? (Površina srednjeg trokuta je $2P$, odnosno, dva puta veća od površine malog trokuta.)

Dva srednja trokuta se poklapaju s velikim trokutom. Što smo rekli, kolika je površina jednog srednjeg trokuta? ($2P$) A kolika bi onda bila površina velikog trokuta, ako se on poklapa s dva srednja? ($4P$) Tako je. Površina velikog trokuta je dva puta veća od površine srednjeg trokuta.

Pogledajte kvadrat. Što mislite s koliko malih trokuta bi se on poklopio? (2) Dakle, kvadrat ima površinu kao dva mala trokuta, odnosno $2P$. Površina kvadrata je dva puta veća od površine malog trokuta.

Koliko malih trokuta bi se moglo preklopiti s paralelogramom? (2) Tako je, što znači da i paralelogram ima dva puta veću površinu od malog trokuta.

Sada znamo površine svih dijelova tangrama. Recite mi, koji likovi imaju jednake površine? (Dva mala trokuta imaju površinu P , dva velika trokuta površinu $4P$, a kvadrat, paralelogram i srednji trokut površinu $2P$.) Izvrsno.

Kolika je onda ukupna površina tangrama? (Ukupna površina tangrama je $16P$) To znači da je ukupna površina tangrama 16 puta veća od površine malog trokuta.

Sada je vaš zadatak da složite jedan pravokutnik. Što je pravokutnik? (paralelogram koji ima jedan unutarnji kut pravi...) Kako glasi opseg pravokutnika? ($O=2a+2b$) A površina? ($P=a*b$) Ne zaboravite iskoristiti svih 7 dijelova tangrama.

Vjeruje se da su u davna vremena Kinezi koristili tangram kako bi "ispričali priču". Čovjek koji bi pričao priču, je uz pomoć tangrama ilustrirao dijelove same priče, te tako oživljavao događaje i uveseljavao slušatelje.

Ja ću vam sada pročitati jednu kratku priču, a vi poslušajte.

Nezadovoljni zec šetao je po polju i šumi.

Naiđe zec na vjevericu. „Kako ti je lijep rep! Pogledaj samo koliko je veliki i kako je čupav! A tek koliko si spretna! Šta bih ja dao da imam takav rep i da imam tvoju spretnost!!!“

„Ali ti imaš najbrže noge od svih u šumi!“ začuđeno mu odgovori vjeverica.

Zec se nije obazirao na ove vjeveričine riječi, već nastavi dalje kroz šumu.

Sretne medvjeda.

„Ti si najjači u cijeloj šumi! Svi te se plaše i svi te poštuju. Kada bih ja mogao bar jedan dan biti jak kao ti!“

„Tebi nije potrebna snaga pored tako brzih nogu.“ uzvratila mu medvjed.

Ponovo zec ne sasluša do kraja, nego okrene glavu i ode dalje.

Krećući se kroz šumu, zamišljao je kako je jak kao medvjed i spretnan kao vjeverica.

U tom svom zanosu nije ni primijetio lisicu.

Što se onda dogodilo? (individualni odgovori) Koja bi bila pouka ove priče? (individualni odgovori)

Ukoliko nitko od učenika ne predloži prijateljstvo na kraju priče, kažem im da zamisle kraj gdje su se likovi sprijateljili.

Koliko se likova spominje u priči? (četiri) Koji su to? (nezadovoljni zec, vjeverica, medvjed i lisica) Pokušajte složiti navedene likove iz priče.

Zadatak:

Zec želi uokviriti fotografiju svojih novih prijatelja. Fotografija je pravokutnik opsega 24 cm. Kolike su duljine stranica fotografije ako zec želi fotografiju najveće površine?

Što nam je poznato u zadatku? (fotografija je pravokutnik, opseg pravokutnika) Kako glasi opseg pravokutnika? ($O=2a+2b$) Što zec želi? (fotografiju najveće površine) Kako računamo površinu pravokutnika? ($P=a*b$) Izvrsno. Što nam je potrebno za računanje i opsega i površine? (duljine stranica) Izvrsno. Dakle, poznat nam je opseg, ali duljine stranica nisu. Sada ćemo zajedno pronaći duljine stranica koje nam daju pravokutnik opsega 24 cm.

Opseg	a	b	Površina
24	1	11	11
24	2	10	20
24	3	9	27
24	4	8	32
24	5	7	35
24	6	6	36

Može li nam stranica a biti 1 cm? (može) Koliko onda iznosi duljina stranice b? (11 cm) Ostatak učenici samostalno računaju i popunjavaju tablicu. Ja ih usmjeravam i pomažem im.

Što smo rekli, kako računamo površinu pravokutnika? ($P=a*b$) Imate li svi sada stranice pravokutnika? (imamo) Sada izračunajte površine pojedinih pravokutnika i zaokružite najveću.

Koji broj ste zaokružili? (36) izvrsno. Recite mi, kolike su duljine stranica tog pravokutnika? (sve su 6 cm) Kako zovemo pravokutnik kojemu su susjedne stranice jednakih duljina? (Kvadrat) Točno. Što na kraju možemo zaključiti? Od svih pravokutnika zadanog opsega, tko ima najveću površinu? (Kvadrat)

ZAVRŠNI DIO

Osmislite neki svoj lik i pažljivo ga zalijepite na papir te u donjem desnom kutu napišite naziv.

Popis elektronskih priloga

Popis slika

Slika 1. Konveksan skup	2
Slika 2. Nije konveksan skup	2
Slika 3. Četverokut	3
Slika 4. Elementi četverokuta	3
Slika 5. Zbroj unutarnjih kutova četverokuta	4
Slika 6. Trapezi	5
Slika 7. Parelelogrami	5
Slika 8. Klasifikacija četverokuta	7
Slika 9. Mreža kvadra (Kosak i suradnici, 2014:10)	11
Slika 10. Prepoznavanje kvadra (Kosak i suradnici, 2014:10)	12
Slika 11. Mreža kocke (Kosak i suradnici, 2014:11)	12
Slika 12. Prepoznavanje kocke (Kosak i suradnici, 2014:11)	13
Slika 13. Otisak cipele (Kosak i suradnici, 2014:19)	13
Slika 14. Otisak kvadra (Kosak i suradnici, 2014:22)	14
Slika 15. Otisak kocke (Kosak i suradnici, 2014:23)	14
Slika 16. Likovi u ravnini (Kosak i suradnici, 2014:80)	16
Slika 17. Ravnina (Jagodić i Mrkonjić, 2014:69)	16
Slika 18. Ravnina (Kosak i suradnici, 2014:82)	17
Slika 19. Kut (Kosak i suradnici, 2014:82)	18
Slika 20. Pripadnost točaka kutu (Kosak i suradnici, 2014:83)	18
Slika 21. Presavijanje papira (Kosak i suradnici, 2014:84)	19
Slika 22. Crtanje pravog kuta (Kosak i suradnici, 2014:85)	19
Slika 23. Crtanje pravokutnika i kvadrata (Kosak i suradnici, 2014:96)	22
Slika 24. Opseg pravokutnika (Kosak i suradnici, 2014:97)	23
Slika 25. Opseg kvadrata (Kosak i suradnici, 2014:98)	23
Slika 26. Tangram	40
Slika 27. Složen kvadrat	41
Slika 28. Složen pravokutnik	41
Slika 29. Zec	42
Slika 30. Vjeverica	42
Slika 31. Medvjed	43
Slika 32. Lisica	43
Slika 33. Psić, učenički rad	44

Slika 34. Raketa, učenički rad	44
Slika 35. Navijač, učenički rad	45
Slika 36. Kraljica, učenički rad	45
Slika 37. Trkač, učenički rad	46
Slika 38. Komentari učenika	46

Popis tablica

Tablica 1. Primjeri učenikog zaključivanja(Čizmešija i suradnici, 2010:149).....	10
Tablica 2. Pravokutnik i kvadrat(Kosak i suradnici, 2014:95)	20
Tablica 3. Opseg pravokutnika i kvadrata	24
Tablica 4. Površina pravokutnika i kvadrata	25

Životopis

Zovem se Monika Leko. Rođena sam 27. kolovoza 1991. godine u Nürnbergu, Savezna Republika Njemačka. Nakon završene osnovne škole (OŠ Zrinskih Nuštar) upisala sam Opću gimnaziju u Vinkovcima. Maturirala sam s vrlo dobrim uspjehom. Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni učiteljski studij – Razvojni smjer na Fakultetu za odgojne i obrazovne znanosti u Osijeku, dislocirani studij u Slavonskome Brodu upisala sam 2010. godine.

Tijekom studija sudjelovala sam u organizaciji humanitarne akcije Božićna zvijezda, provedbi akcijskog istraživanja Kako koristiti metode suradničkog učenja u nastavi?, na radionicama u sklopu međunarodne studentske konferencije Veliki dječji književnici kao univerzalni kapital.

Služim se računalom te engleskim i njemačkim jezikom u govoru i pismu. Posjedujem vozačku dozvolu B kategorije.