

Elementi vjerojatnosti u početnoj nastavi matematike

Čabai, Luka

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Education / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:141:930680>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-04-02**



Repository / Repozitorij:

[FOOZOS Repository - Repository of the Faculty of Education](#)



SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI

LUKA ČABAI

**ELEMENTI VJEROJATNOSTI U POČETNOJ
NASTAVI MATEMATIKE**

DIPLOMSKI RAD

Osijek, 2021.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni Učiteljski studij

ELEMENTI VJEROJATNOSTI U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

DIPLOMSKI RAD

Predmet: Metodika matematike II

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ružica Kolar-Šuper

Student: Luka Čabai

Matični broj: 1311026268

Modul: B

Osijek, rujan 2021.

SAŽETAK

Cilj rada bio je analizirati s kojim se elementima vjerojatnosti učenici razredne nastave susreću. Vjerojatnost je vrlo bitna sastavnica sadržaja koji pridonose učeničkom napretku jer im daje sposobnost razlučivanja sigurnih, mogućih i nemogućih događaja, te procjenjivanja šanse u kojima se oni mogu dogoditi.

Kako učenici u Hrvatskoj kreću u prvi razred sa 6-7 godina, Piagetova istraživanja da dijete sa 9-12 godina počinje shvaćati koncepte vjerojatnosti u stvarnosti, a ne samo u pojmovima, znači kako bi se trebala posvetiti veća pažnja prikladnim sadržajima vjerojatnosti u ovom razdoblju učeničkog razvoja. Istraživanja iz Grčke, Slovenije i Lesotha pokazuju kako učenici koji su proučavali matematičke probleme iz područja vjerojatnosti od najmlađe dobi (6 godina) imaju bolju podlogu za učenje vjerojatnosti od onih koji počinju učiti kada to kurikulum propisuje jer im je lakše baratati pojmovima koje već poznaju.

U ovom radu razmatran je Hrvatski kurikulum, te je učinjena usporedba s kurikulumima najbolje rangiranih država (Singapur, Hong Kong, Koreja) na PISA-inom natjecanju iz matematike 2012. godine. Iz viđenih rezultata možemo zaključiti kako su upravo ove države stavile veliki naglasak na učenje vjerojatnosti i statistike od 1. razreda, za razliku od Hrvatskog starog kurikula u kojem je uvedeno pojmovlje tek u 5. razredu. U udžbenicima iz 2021. uvedeni su sadržaji iz domene Podaci, statistika i vjerojatnost koja zauzima od 6% do 11% ukupnog fonda godišnje satnice matematike.

Ključne riječi: kurikulum, učenje, udžbenici, vjerojatnost

Title: Elements of probability in primary education

ABSTRACT

The objective of this paper was to check which elements of probability are encountered by primary school students. Probability is a very important component of student progress because it gives them the ability to distinguish certain, possible and impossible events, and the chances in which they can occur.

Considering the fact that students in Croatia start school at the age of 6-7, Piaget's research that says that a child at age of 9-12 begins to understand the concepts of probability in reality and not only in terms which means that more attention should be pointed to learning probability in this period of student's development. Research from Greece, Slovenia and Lesotho shows that students who have studied probabilistic math problems from an early age (6 years) have a better basis for learning probabilities than those who start learning when the curriculum prescribes because it is easier for them to deal with concepts they already know.

This paper studied the Croatian curriculum and compared it with the curricula of the best ranked countries (Singapore, Hong Kong, Korea) at the 2012 PISA Mathematics Competition. From the results seen, we can conclude that these countries have placed great emphasis on learning probabilities and statistics from the 1st grade, in contrast to Croatia's last curriculum, which introduced the concept in the 5th grade. In the textbooks from 2021., through new outcomes, the domain Data, statistics and probability was introduced, which ranges from 6% to 11% of the total fund of the annual mathematics lesson.

Keywords: curriculum, learning, textbooks, probability

SADRŽAJ

UVOD	1
PREGLED RELEVANTNE LITERATURE ISTRAŽIVANJA	2
1. Povijest vjerojatnosti	2
1.1. Vjerojatnost u starim civilizacijama.....	2
1.2. Temelji vjerojatnosti i 17. stoljeće	2
2. Uvod u vjerojatnost	5
2.1. Klasifikacija i formulacija vjerojatnosti	5
2.2. Moguć, nemoguć i siguran događaj	6
2.3. Eksperiment.....	7
2.4. Rješavanje problema	8
3. Poučavanje vjerojatnosti.....	9
3.1. Učenje matematike	9
3.2. Značaj poučavanja vjerojatnosti.....	11
3.3. Uvođenje poučavanja vjerojatnosti u Hrvatskoj	11
3.4. Poučavanje vjerojatnosti.....	12
3.5. Provedena istraživanja.....	16
3.6. Pravedna i nepravedna igra	18
4. Kurikul nastavnog predmeta matematike	19
4.1. Matematički procesi i domene	19
4.2. Zastupljenost vjerojatnosti u kurikulu po razredima.....	22
4.3. Vjerojatnost u kurikulumima najbolje plasiranih zemalja na PISA testovima.....	26
5. Elementi vjerojatnosti u udžbenicima početne nastave matematike	29
ZAKLJUČAK	33
POPIS LITERATURE	34

UVOD

U ovom radu promatrat ćemo elemente vjerojatnosti s kojima se upoznaju učenici 1. – 4. razreda osnovne škole.

Razmatrat ćemo načine učenja matematike i načine poučavanja vjerojatnosti u svijetu i u Hrvatskoj i izvesti zaključke o razlikama. Uz proučavanje poučavanja, analizirat ćemo Kurikul za predmet matematika od 1. do 4. razreda osnovne škole, te ga usporediti sa kurikulumima zemalja koji su visoko rangirani na PISA-inoj ljestvici matematičke pismenosti.

Jedna od glavnih zadaća ovoga rada je analizirati sadržaje u udžbeničkoj građi 2021. godine.

PREGLED RELEVANTNE LITERATURE ISTRAŽIVANJA

1. Povijest vjerojatnosti

1.1. Vjerojatnost u starim civilizacijama

Koncept šanse i vjerojatnosti star je koliko i sama civilizacija. Ljudi su pokušavali razumjeti kako predvidjeti vrijeme, plodnost zemlje i ostale aspekte njihovog okruženja kako bi mogli biti sigurni u događaje koji će se dogoditi. (Degroot i Schervish, 2013)

Kockanje ima vrlo dugu povijest. 3500. godine prije Krista igrala se igra s objektom izrađenim od kosti koji izgleda kao predak kocke koja je bila razvijena u Egiptu. Preteče moderne kocke sa sličnim natpisima pronađene su u Egiptu u sarkofazima koji datiraju iz 2000 godina prije Krista. (Degroot i Schervish, 2013)

Oko 3. stoljeća prije Krista indijski matematičari rješavali su matematičke probleme temeljene na vjerojatnosti iz religioznih razloga. Zapisnik o tomu imamo iz 9. stoljeća kada je Mahavira opisao kako su se bavili permutacijama i kombinacijama. (Maširević i Kozić, 2015)

Što se tiče napretka vjerojatnosti rezultata bacanja kockica, ona je kroz vrijeme napredovala, ali tek je opisana u djelima Giromala Cardana (1501. – 1576.) i Galilea Galileia (1564. – 1642.) (Degroot i Schervish, 2013)

1564. godine nastala je knjiga Giromala Cardana, *Liber de luda* u kojoj su opisani problemi o igrama na sreću u kojima se koriste izračuni vjerojatnosti. U knjizi se također nalazi i klasična definicija vjerojatnosti kao omjera broja povoljnih i broja mogućih ishoda. Cardano je uz svoju matematičku karijeru bio i poznati kockar. (Maširević i Kozić, 2015)

1.2. Temelji vjerojatnosti i 17. stoljeće

Prve prave temelje vjerojatnosti pronalazimo u 17. stoljeću. Značajni ljudi u ovom periodu su Blaise Pascal (1623. – 1662.) i Pierre Fermat (1601. – 1665.). Naime, vrlo poznati kockar i francuski plemić Chevalier de Mere, zatražio je od Pascala da mu objasni kontradikcije u njegovom razmišljanju i prikupljenim podacima koje je stekao iskustvom (Uspensky, 1937). U

ovo vrijeme bogataši su bili ti koji su svojim problemima motivirali matematičke genije da postavе temelje matematičke teorije vjerojatnosti (Reichenbach, 1971). Pascal nije stao samo na objašnjenju, već je riješio i još neke probleme iz područja vjerojatnosti, a neki od njih bili su stari i po 300 godina (Degroot i Schervish, 2013). Vidjevši djela Pascala, Fermat se zainteresirao za područje koje je Pascal istraživao te mu se pridružio. Njih dvojica smatraju se začetnicima temelja današnje vjerojatnosti. (Uspensky, 1937)

Prvu knjigu o teoriji vjerojatnosti, *De Rationiniis in Ludo Aleae*, koja govori o problemima u igrama s šansom, objavio je Christiaan Huyghens 1657. godine (Parzen, 1960). U knjizi uvodi koncept matematičkog očekivanja koji je jedan od najbitnijih pojmova moderne teorije vjerojatnosti. (Uspensky, 1937). Do njegovog djela nije postojala niti jedna knjiga, samo rješenja problema. (Parzen, 1960)

Jacob Bernuolli (1654. – 1705.) bavio se vjerojatnošću 20 godina i pripremao knjigu *Ars conjectandi*. Nažalost, Jacob nije uspio završiti knjigu pa ju je nastavio njegov nećak Nicolaus Bernuolli koji je knjigu uspio ne samo dovršiti već i izaći iz kruga koji je zadržavao teoriju vjerojatnosti u problemima vezanim samo uz igre na sreću. Zahvaljujući njemu 1713. godine, 8 godina nakon smrti Jacoba Bernuollija, izdana je knjiga u kojoj je opisan jedan od najbitnijih teorema matematičke vjerojatnosti poznat pod nazivom „Bernuollijev teorem“. (Uspensky, 1937) Sljedeći veliki nasljednik Bernuollija bio je Abraham de Moivre (1667. – 1754.) koji je 1718. godine objavio rad *The Doctrine of Chances* vezan uz teoriju vjerojatnosti. Ponovno je objavio svoje radove 1738. i 1756. Njegovo istraživanje nije puno doprinijelo principima vjerojatnosti, ali ovaj rad je osvježio novim i snažnim metodama za rješenja veoma teških problema. U njoj se mogu pronaći i mnogi važni rezultati, kasnije pripisani Laplacu i Poissonu. (Uspensky, 1937)

Pierre-Simon Laplace (1749.–1827.) 1812. godine objavljuje značajno djelo *Théorie Analytique des Probabilités* u kojem je dao kompletan pregled svih svojih i do tada poznatih rezultata iz područja vjerojatnosti (Maširević i Kozić, 2015). Uz veliku stečenu slavu u mehanici zvjezdanih mehanizama bio je vrlo zainteresiran za vjerojatnost od početka svoje karijere. (Uspensky, 1937)

U klasičnoj definiciji vjerojatnosti danoj od Abrahama de Moivre-a i kasnije razrađenoj u Laplaceovom djelu vjerojatnost se definira kao omjer broja povoljnih ishoda i broja svih mogućih ishoda. Ova definicija naišla je na velike kritike jer su kritičari smatrali kako je vjerojatnost u ovom slučaju vrlo subjektivna i ne daje mogućnost utjecaja nikakvih prirodnih

fenomena koji bi mogli utjecati na rezultat i time rezultati ne bi bili valjani. (Batanero i sur., 2016)

Kompletnu povijest napretka teorije vjerojatnosti od 1575. do 1825. usustavio je Isaac Todhunter 1865. godine pod nazivom *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to Laplace*. (Parzen, 1960)

„1933. Kolmogorov aksiomatizirao je vjerojatnost uvođenjem vjerojatnosnog prostora što je naziv za uređenu trojku (Ω, F, P) koja se sastoji od prostora elementarnih događaja (skupa svih mogućih ishoda) Ω , familije F podskupova od Ω i funkcije $P : F \rightarrow [0, 1]$ koju nazivamo vjerojatnost ukoliko zadovoljava aksiome vjerojatnosti, tj. da je

$P(A) \geq 0$ za svaki $A \in F$, $P(\Omega) = 1$, te da je vjerojatnost unije proizvoljne familije međusobno disjunktih događaja jednaka zbroju vjerojatnosti pojedinih događaja.“ (Maširević i Kozić, 2019, str 124).

Teorija vjerojatnosti se kroz vrijeme razvijala i bila dijeljena na mnoga područja. Danas, teorija vjerojatnosti vrlo je bitan alat koji se koristi u inženjerstvu, znanosti i menadžmentu. Mnogo je ljudi zaposleno u sektorima gdje istražuju nova znanja o vjerojatnosti koji se koriste u područjima poput medicine, meteorologije, fotografiranju iz satelita, marketinga, predviđanju potresa, predviđanju ljudskih ponašanja u istim ili sličnim situacijama, u dizajnu računalnih sustava, financija, genetike i zakona. (Degroot i Schervish, 2013)

2. Uvod u vjerojatnost

Primjeri vjerojatnosti nalaze se svugdje oko nas: vremenska prognoza pretpostavlja da je 60% šansa da će padati snijeg, medicinski istraživači predviđaju da će ljudi koji provode određene dijete imati više šanse da imaju problema sa srcem, investitori računaju rizike u svojim investicijama. Skoro sve simulacije kompleksnih sadržaja bazirane su na vjerojatnosti pomoću kojih se dolazi do rješenja u tim situacijama. Na primjer: sigurnost tijekom vožnje avionom u turbulenciji i planovi ponašanja u slučaju prirodnih nepogoda. (Van de Walle i sur., 2019) Stoga je vjerojatnost vrlo važan dio matematičke edukacije. (Batanero i sur., 2016)

Klasična interpretacija vjerojatnosti bazirana je na konceptu jednakih mogućnosti za oba događaja. Kao primjer promatra se novčić koji ima samo dva moguća ishoda, stoga ima jednake mogućnosti za oba ishoda. (Degroot i Schervish, 2013) Nadalje, teorija vjerojatnosti je u biti formalno čahurenje intuitivnih pogleda na slučaj koji vodi do temeljne ideje o dodjeljivanju brojeva nesigurnim događajima. Kao i sve u početku i ove intuitivne ideje s brojevima pojavile su se u ranoj povijesti u različitim kulturama i bile usko vezane uz klađenje na igre na sreću. (Batanero i sur., 2016) Čak i danas, igre na sreću su prihvatljive u matematičkom računu vjerojatnosti jer mogu vrlo jednostavno predstaviti i prikazati vjerojatnosne zakone. (Reichenbach, 1971)

Bitno je za dodati kako bi bilo netočno za vjerovati da se koncept vjerojatnosti odnosi samo na događaje koji će se dogoditi u budućnosti. Naime, u mnogo izjava o prošlosti može se vidjeti kako se povjesničari koriste konceptima iz vjerojatnosti. Primjer: Povjesničari tvrde kako je vrlo vjerojatno da je Nero naredio spaljivanje Rima. (Reichenbach, 1971)

2.1. Klasifikacija i formulacija vjerojatnosti

Vjerojatnost je omjer koji uspoređuje željene ishode u odnosu na sveukupni broj ishoda. (Van de Walle i sur., 2019)

Formulu vjerojatnosti događaja možemo zapisati kao:

$$\frac{\textit{broj povoljnih ishoda događaja}}{\textit{broj svih mogućih ishoda događaja}}$$

(Van de Walle i sur., 2019)

Ova formula još se naziva i Laplaceova definicija vjerojatnosti slučajnog događaja gdje su svi ishodi jednako mogući, kada nas ništa ne navodi na zaključak da bi se jedan od ovih slučajeva trebao dogoditi češće nego ostali. To ih za nas čini podjednako mogućim. (Parzen, 1960)

Vjerojatnost se temelji na dvije temeljne ideje, a to su: varijabilnost i očekivanje. (Uspensky, 1937))

Za dva slučajna događaja kažemo da su jednako mogući ako, nakon što smo uzeli u obzir sve relevantne dokaze, jedan od njih se ne može očekivati u prednosti nad drugim. (Uspensky, 1937)

Vrlo je bitno razlikovati riječi „vjerojatnost“ i „vjerojatno je“ u kontekstu jer se koriste u različite svrhe. Ukoliko je rečeno: „Vjerojatno će kiša padati sutra“, tada smatramo da imamo mnogo indikatora koji pokazuju da će kiša padati. U drugu ruku, ukoliko kažemo: „Mala je vjerojatnost u priči koju nam je ispričao“, riječ „vjerojatnost“ se koristi u smislu vjerodostojnosti. (Uspensky, 1937) U mnogim problemima vjerojatnost događaja može se interpretirati kao relativna frekvencija kojom bi se taj ishod postigao ukoliko bi se proces ponovio veliki broj puta pod sličnim uvjetima. (Degroot i Schervish, 2013)

2.2. Moguć, nemoguć i siguran događaj

Vjerojatnost da će se dogoditi određeni događaj može varirati između nemogućeg (0) i sigurnog (1). (Van de Walle i sur., 2019) Ukoliko je vjerojatnost događaja jednaka 0 to znači da je ovaj događaj nemoguć događaj. U suprotnom, ako je vjerojatnost 1 to znači da je događaj siguran. Ukoliko je vjerojatnost izražena brojem bliže ili vrlo blizu 1 kažemo da je vjerojatnost za pozitivan ishod vrlo velika. U suprotnom, ukoliko je broj bliže 0 kažemo da je vjerojatnost za pozitivan ishod vrlo mala (Uspensky, 1937).

2.3. Eksperiment

Neke vjerojatnosti nije moguće prikupiti kroz analizu mogućih ishoda događaja, već je potrebno prikupljati empirijske podatke. Ti podaci možda već postoje ili tek trebaju biti pokazani kroz eksperiment jer je potrebno mnogo mjerenja kako bi rezultat relativne frekvencije bio zadovoljavajući po teoriji vjerojatnosti. (Van de Walle i sur., 2019)

Eksperiment je svaki proces, stvaran ili hipotetski, u kojemu pozitivni ishodi mogu biti identificirani prije provedbe (Degroot i Schervish, 2013). U ovakvim eksperimentima ne postoji način kako bi se predvidjeli rezultati prije početka, ali ako imamo 200 bacanja (empirijskih podataka) osjećamo se hrabro za predvidjeti idućih 100 bacanja. No ako prikupimo 1000 bacanja osjećat ćemo se još hrabrije procijeniti rezultate idućih 100 bacanja. (Van de Walle i sur., 2019)

Eksperiment izvlačenja kuglica

U eksperimentu 600 nasumičnih izvlačenja kuglica iz kutije u kojoj se nalaze 4 bijele i 2 crvene kuglice vidimo dobivene rezultate: (Parzen, 1960)

In Trials Numbered	Number of White Balls Drawn	In Trials Numbered	Proportion of White Balls Drawn
1–100	69	1–100	0.690
101–200	70	1–200	0.695
201–300	59	1–300	0.660
301–400	63	1–400	0.653
401–500	76	1–500	0.674
501–600	64	1–600	0.668

Slika 1. Prikaz rezultata izvlačenja kuglica

(Parzen, 1960)

2.4. Rješavanje problema

2.4.1. Semafor i zeleni val

Recimo da se Ivana vozi autobusom do trga i nada se što prije stići tamo. Najbrže će stići ukoliko autobus ne stane niti na jednom crvenom. Poznajući ulice i semafore svoga grada Ivana zna, da ako autobusu na prvom semaforu bude zeleno, da će autobus zahvatiti takozvani zeleni val. No, ciklus svjetala semafora izgleda ovako: crveno je 20s, žuto 5s, a zeleno 50s. Kolika je vjerojatnost da će Ivanin autobus na prvom semaforu zahvatiti zeleno svjetlo? Ukupno trajanje ciklusa svjetala iznosi: $20s + 5s + 50s = 75s$

U ovom slučaju trajanje zelenog svjetla predstavlja pozitivan ishod pa ćemo ga označiti kao A , te vrijedi da je $p(A) = 50/75$ što je $2/3$ odnosno 0.667 . Ivanin autobus će imati približno 67% šanse da prođe kroz zeleno svjetlo i uhvati zeleni val. (Maširević i Kozić, 2015)

2.4.2. Izvlačenje karata

Recimo da se špil karata sastoji od 52 karte od kojih su 4 asa nasumično izmiješana u tom špilu. Nakon toga 52 karte podijele se na 4 igrača tako da svaki igrač dobije 13 karata. Kolika je šansa da će svaki igrač dobiti samo jedan asa?

Sve moguće kombinacije u kojima se asa može nalaziti je $\binom{52}{4}$ i sve su jednako moguće da će se dogoditi. Ukoliko želimo da svaki igrač dobije jednog asa, taj asa mora biti na jednoj od pozicija od njegovih 13 karata, tako vrijedi za sva 4 igrača. Stoga zaključujemo da će od $\binom{52}{4}$ broja kombinacija samo 13^4 dati točan rezultat. Iz toga slijedi kako je šansa da će svaki igrač dobiti asa u svojoj ruci od 13 karata jednaka:

$$p = \frac{13^4}{\binom{52}{4}} = 0.1055, \quad \text{odnosno } 10.55\%$$

(Degroot i Schervish, 2013)

3. Poučavanje vjerojatnosti

3.1. Učenje matematike

U postavljanju ciljeva učenja često se pitamo što će učenici znati i za što će biti sposobni. No, što je to što učenik treba znati? Potrebne su dvije vrste znanja: *proceduralno*, rješavanje algoritama i procedura, i *konceptualno*, još znano kao povezano znanje. Obje vrste znanja vrlo su bitne za fluidno i konceptualno razumijevanje (Van de Walle i sur., 2019).

Često se za matematiku govori kako ona ima univerzalni jezik, ali to nije potpuno točno. Osnovno znanje matematike je univerzalno, no simboli i načini rješavanja zadataka su kulturološki određeni. U primjeru množenja $3 \cdot 4$ Europljani će reći kako ovaj izraz znači da je tri uzeto četiri puta, no Amerikanci će reći kako ovaj izraz prikazuje tri grupe po četiri. (Van de Walle i sur., 2019)

U nekim zemljama „mentalna“ matematika značajnija je nego u Americi, gdje je naglasak na rješavanju problema sustavno pišući sve korake koji su provedeni. (Van de Walle i sur., 2019)

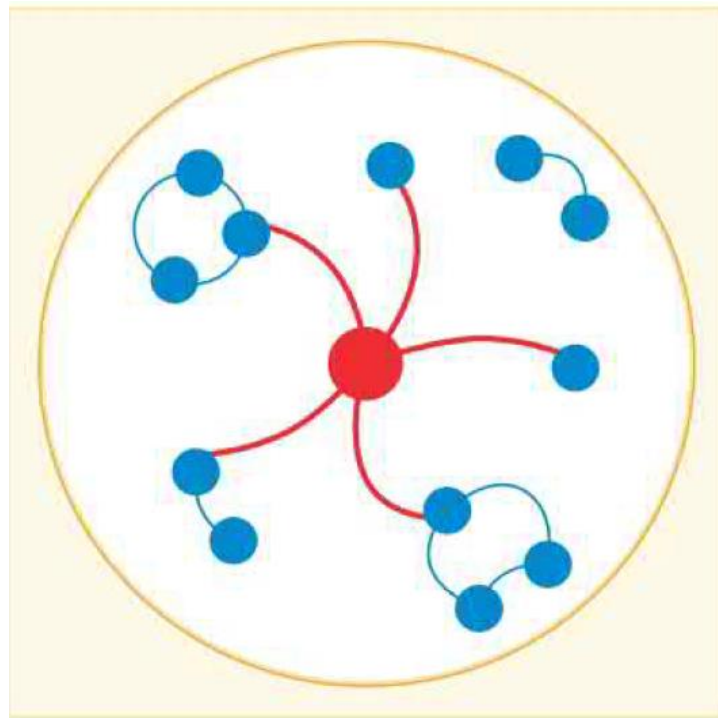
Teorije učenja poput konstruktivizma i sociokulturne teorije utjecale su na način poučavanja matematike. Na nastavnu praksu pojedinca utjecat će način na koji vjeruje da ljudi uče, što može biti potkrijepljeno jednom od ovih teorija učenja i osobnim pragmatičnim iskustvom. (Van de Walle i sur., 2019)

Ovdje ukratko opisujemo ove dvije teorije koje su važne za razumijevanje načina na koji učenici uče matematiku. Ove teorije nisu u proturječnosti i kompatibilne su. (Van de Walle i sur., 2019)

Konstruktivizam

Konstruktivna teorija vuče korijene iz Piagetova djela iz 1930-ih godina. U srži konstruktivizma leži izjava kako učenici nisu prazne stranice, već kreatori vlastitog učenja. Mnoge sheme se stvaraju konstruktivnim znanjem i koriste se kako bi se povezala nova znanja. Integrirane mreže ili kognitivne sheme nastaju konstruiranjem znanja i koriste se za izgradnju novog znanja. (Van de Walle i sur., 2019)

Koristimo ideje koje već imamo (plave točkice) za izgradnju nove ideje (crvena točka), pri čemu se razvija mreža povezivanja ideja. Što se više ideja koristi i što ih se više poveže, to bolje razumijemo (slika 2.). (Van de Walle i sur., 2019)



Slika 2. Mreža povezivanja ideja

(Van de Walle, J. A. i sur., 2019)

Sociokulturalna teorija

Korijeni sociokulturne teorije leže u razmatranjima Leva Vygotskog iz 1920-ih i 1930-ih godina. I ova teorija kao i konstruktivizam traži da se učeniku znanje nadograđuje kroz aktivno traženje. Najbitniji faktor sociokulturne teorije je način na koji je informacija primljena i naučena, te ona ovisi o zoni proksimalnog razvoja (ZPR). ZPR je udaljenost između razine stvarnog razvoja djeteta određene neovisnim rješavanjem problema i razine potencijalnog razvoja određene rješavanjem problema pod vodstvom odraslih ili u suradnji sa sposobnijim vršnjacima. U ovoj teoriji jako je bitna socijalna interakcija. (Van de Walle i sur., 2019)

3.2. Značaj poučavanja vjerojatnosti

Jedan od razloga za poučavanje vjerojatnosti je priprema za nošenje sa situacijama, predviđanja, odlučivanje među različitim vjerojatnostima, rješavanje problema i razvitak sposobnost učenja na drugačiji način od onog determinističkog. (Tsakiridou i Vavyla, 2015) Također, učenje vjerojatnosti je bitno radi potrebe za razumijevanjem ishoda događaja i potrebe za odabirom ispravnih opcija u stvarnim situacijama. (Batanero i sur., 2016)

Veliku važnost treba posvetiti i prihvaćanju činjenica da se nepovoljni ishodi također mogu dogoditi i da nije uvijek moguće nešto predvidjeti sa sigurnošću. Učenike se uči da kritički interpretiraju sve mogućnosti i odaberu onu koja je najvjerojatnija da će se dogoditi. Promatrajući vjerojatnost, učenici skupljaju iskustvo za stvarne događaje koje će im biti potrebne da svakodnevno odabiru najbolju opciju od mnogih. (Tsakiridou i Vavyla, 2015) Učenici će biti sposobni da se uključe u zanimljive aktivnosti koje kod učenika mogu pobuditi pozitivna razmišljanja i napredak. Stoga je učenje sadržaja vjerojatnosti vrlo bitno i ima mnogo prednosti u odnosu na druge matematičke discipline. (Tsakiridou i Vavyla, 2015)

3.3. Uvođenje poučavanja vjerojatnosti u Hrvatskoj

U Hrvatskoj od 1. do 4. razreda po prvi puta vjerojatnost je uvedena u sklopu nacionalnog kurikula 2006. godine u matematičkoj domeni Podaci. Obrazovna postignuća ovog područja su: „prebrojiti različite ishode u jednostavnim situacijama rabeći stvarne materijale i dijagrame, primjenjivati osnovni jezik vjerojatnosti (ishod, moguć, nemoguć, siguran, slučajan, vjerojatan, pravedna igra, nepravedna igra i slično)“ (Loparić, 2019) No u većini udžbenika iz 2006. godine nije ni moguće naći poglavlja posvećena elementima vjerojatnosti pa je zadaća učitelja bila da osmisle kada i kako uvesti ove teme. (Loparić, 2019)

3.4. Poučavanje vjerojatnosti

Piaget i Inhelder 1951. izrazili su svoja mišljenja kako prvi susret s vjerojatnošću djeteta postiže na razini konkretnih operacija, u kojem počinje razdvajati pojmove siguran i moguć događaj. Nadalje, govore kako sustavno razumijevanje vjerojatnosti se ne javlja prije 9 – 12 godina. Čak i tijekom tog razdoblja djeca rješavaju ove probleme intuicijom, a ne formalnim rasuđivanjem. (Tsakiridou i Vavyla, 2015)

Prema Polaki (2002.) postoje 4 stupnja učenja vjerojatnosti:

1. stadij: subjektivni – u ovom stadiju učenici predviđaju najmanje vjerojatan i najvjerojatniji događaj na temelju njihovih osobnih doživljaja.
2. stadij: - predviđanje najmanje vjerojatnog i najvjerojatnijeg događaja.
3. stadij: - točno predviđanje događaja koji su vjerojatniji, te upotrebljavanje brojeva.
4. stadij: - određivanje točnih vjerojatnosti događaja.

(Loparić, 2019)

Vjerojatnost bi se trebala, kao i većina programa, učiti pristupom rješavanja problema.

Za učenje vjerojatnosti i samo istraživanje vrlo je lako uključiti faze *prije*, *tijekom* i *poslije*. U fazi *prije* učenici predviđaju što oni misle da će biti više vjerojatno, u fazi *tijekom* učenici eksperimentiraju i istražuju kolika je vjerojatnost ishoda. U fazi *poslije* učenici prikupljaju podatke i zaključuju kolika je uistinu vjerojatnost ishoda. (Van de Walle i sur., 2019)

English i Watson (2016) opisuju tri faze koje su koristili kako bi povećali rano razumijevanje vjerojatnosti kod učenika:

1. Konkretno istraživanje: učenici predviđaju što oni misle da će se dogoditi i pokreću eksperiment
2. Prikaz: učenici organiziraju i prikazuju podatke prikupljene u 1. fazi odabirući njihov individualni način za obradu podataka koji mogu sadržavati liste, tablice, grafove i slikovne prezentacije
3. Konstrukcija: učenici analiziraju njihove prikaze pa iz njih konstruiraju modele opisa vjerojatnosti. Potrebno je prikazati simbolički i pomoću dijagrama.

(Van de Walle i sur., 2019)

Ono što učenicima može pomoći u učenju vjerojatnosti su različiti alati: spinner, kockica s brojevima, novčići, razne obojane tube. Za početak učenja nasumičnog ishoda varijable trebalo bi se uvesti bacanje novčića, a tek poslije polja s bojama koja postavimo u vreću pa učenici izvlače. (Van de Walle i sur., 2019)

Prije samog rješavanja problema potrebno je pitati što učenici misle što će se dogoditi tijekom eksperimenta što poboljšava učeničko razumijevanje ideja o vjerojatnosti. (Van de Walle i sur., 2019)

Stoga jedan od načina uvođenja vjerojatnosti može biti i zadatak da se pred učenike postave problemi, te da pokušaju reći je li događaj siguran, moguć ili nemoguć:

- Sutra će padati kiša.
- Kamenčić bačen u vodu će potonuti.
- Danas zasađeno zrno suncokreta će sutra procvjetati.
- Sunce će sutra izaći.
- Tornado će pogoditi naš grad.
- Kandidat A će biti izabran na izborima.
- Imaš dva rođendana godišnje.
- Sutra u 9 ujutro ćeš biti u krevetu .

Za svaki od ovih događaja učenici trebaju odlučiti koliko je moguće da će dogoditi. Za zadaću moguće je dati da se učenici konzultiraju s obitelji i zapišu još neke primjere sigurnih, mogućih i nemogućih događaja. Ovo im je šansa da pokažu različite primjere. (Van de Walle i sur., 2019)

3.4.1. Izazovi (lažne pretpostavke) vezane uz vjerojatnost

1. Komutativna zbunjenost

- *Kriva pretpostavka:* Znajući da je $3 + 4$ jednako kao i $4 + 3$, šansa za ishod jedan dječak (B) i dvije djevojčice (G) može se interpretirati kao jedan mogući, a ne tri. (BGG, GBG, GGB)
- *Primjer:* Učenik promatra dvije djevojčice i jednog dječaka kao jedan mogući ishod i prema tome misli da je šansa ishoda jednog dječaka i dvije djevojčice jednaka kao da imamo tri djevojčice.
- *Rješavanje ovog problema:*
 - Naznačiti učenicima sve moguće događaje
 - Raspraviti kako je došlo do zbunjenosti
 - Koristiti obojane kocke i simulirati ovaj problem
 - Napraviti eksperiment i raspraviti o varijabilnosti među svim učeničkim prikupljenim podacima

2. Kockarova zabluda

- *Kriva pretpostavka:* Ideja kako prijašnji rezultati utječu na ishod
- *Primjer:* Učenik može reći, ukoliko se 4 puta za redom baci novčić i dobije glava da će onda veća šansa biti da će 5. bacanje biti pismo, što je netočno
- *Rješavanje ovog problema:*
 - Naglasiti kako novčić ne posjeduje nikakvo pamćenje i da je šansa da padne na pismo ili glavu uvijek 50%

3. Zakon malih brojeva

- *Kriva pretpostavka:* Učenici očekuju kako se mali uzorci moraju ponašati kao oni s velikim brojem podataka
- *Primjer:* U bacanju novčića učenik može zaključiti da je nemoguće u seriji od 5 bacanja dobiti 5 pisama za redom
- *Rješavanje ovog problema:*

- Potaknuti učenike na rješavanje aktivnosti koje pobuđuju ovaj tip očekivanja
- Naglasiti kako u primjeru bacanja novčića nije toliko neobično da se u malim uzorcima događaju ovakvi rezultati, te da oni ne mogu prikazivati situaciju u velikom broju podataka podataka

4. Brojenje mogućnosti

- *Kriva pretpostavka:* Učenici zaključuju kako su svi događaji jednako mogući
- *Primjer:* Ukoliko je spinner obojan 75% crvenom i 25% plavom bojom učenik može zaključiti da je šansa da se pokaže jedna od tih boja 50%
- *Rješavanje ovog problema:*
 - Napraviti eksperimente kako bi mogli usporediti rezultate s njihovim prethodnim pretpostavkama
 - Koristiti aktivnosti koje su dizajnirane tako da pomognu učeniku da se fokusira na frekvenciju umjesto na broj mogućih kombinacija

5. Reprerzentativnost

- *Kriva pretpostavka:* Ideja da ishodi koji su nasumičniji imaju veću šansu da se dogode.
- *Primjer:* Učenik može misliti da ukoliko za loto od 3 broja izabere 10, 21 i 35 da mu je veća šansa za dobitak nego da je izabrao 10, 11 i 12.
- *Rješavanje ovog problema:*
 - Korištenje eksperimenata i simulacija
 - Pomno raspravljanje o reprerzentativnosti

(Van de Walle i sur., 2019)

3.5. Provedena istraživanja

3.5.1. Istraživanje o poučavanju vjerojatnosti u osnovnoj školi u Grčkoj

Istraživanje provedeno u Grčkoj imalo je zadatak provjeriti sposobnost učenika pri rješavanju problema iz vjerojatnosti. Sudjelovalo je 404 učenika od 2. do 6. razreda (1.-5.). Ispit se sastojao od 7 pitanja od kojih su:

- Prva dva pitanja testirala učenikovo poznavanje pojmova sigurnoga, mogućeg i nemogućeg događaja, ovaj zadatak razlikovao se za mlađe dobne skupine
- U 3. i 4. zadatak testirali su učenikovu sposobnost procjene koji je slučaj više vjerojatan
- U 5. zadatku učenici su trebali zaokružiti točan odgovor, dok su im tri različite situacije bile objašnjene i pitanja su se odnosila koliko mogući mogu biti neki događaji
- 6. i 7. zadatak nudili su izbor između dviju kutija, od kojih je svaka u sebi sadržavala određeni broj raznobojnih kuglica. Učenikov zadatak bio je označiti kutiju za koju misli da će imati veću šansu da izvuče crnu kuglicu iz jednog pokušaja.

Rezultati istraživanja:

U istraživanju je utvrđeno da je većina djece od drugog do šestog razreda osnovne škole uspjela usporediti vjerojatnosti različitih događaja. Također, postoje i neke statistički značajne razlike između različite dobi učenika i spola pri rješavanju zadataka iz vjerojatnosti. (Tsakiridou i Vavyla, 2015)

3.5.2. Razlike u poučavanju vjerojatnosti iskusnog učitelja i učitelja početnika

Zadatak istraživanja bio je provjeriti kako će iskusni učitelj, a kako učitelj početnik razumjeti poteškoće učenika.

U ovom istraživanju pokazano je kako je iskusni učitelj uspio primijetiti učeničke teškoće u učenju vjerojatnosti mnogo brže nego što ih je uočio učitelj početnik.

Razlike prema spolu su minimalne i zanemarive.

Pokazano je i kako učitelj početnik često podcjenjuje učenikove sposobnosti. Za iskusnog učitelja pokazano je kako često pronalazi i opisuje pojave iz stvarnog života kako bi pojasnio učenicima pojmove koji im nisu jasni. Predviđanje poteškoća također je stvar koja ide u korist iskusnom učitelju koji je bio vrlo dobro pripremljen za postavljena pitanja jer ih je unaprijed očekivao. Nadalje, što se tiče kurikula iskusni učitelj pokazao je odbojnost prema kurikulu, ali nije zanemario ono što učenik treba znati nakon sata. Što se tiče učitelja početnika, on je pratio kurikularne prijedloge i nije se od njih odmicao. Ističe se kako je vrlo bitno razmjenjivati stajališta i mišljenja među iskusnim učiteljima i učiteljima početnicima jer se tako unapređuje učiteljeva sposobnost da uoči ukoliko je nekom učeniku potreba pomoć i u kojem trenutku. (Zapata-Cardona, 2010)

3.5.3. Razumijevanje koncepata vjerojatnosti u početnoj nastavi matematike u Sloveniji

Istraživalo se koliko su učenici uspješni u rješavanju zadataka iz područja vjerojatnosti i u kolikoj mjeri je učenje vjerojatnosti od 1. razreda korisno.

Istraživanje je pokazalo kako su učenici 1. 2. i 3. razreda uspjeli svladati, odnosno upoznati se s pojmovima siguran, moguć i nemoguć događaj. 50% učenika predškole uspjelo je razumjeti ove pojmove. Učenici su bolje riješili zadatke s diferencijacijom mogućih i nemogućih događaja nego one s usporedbom različitih vjerojatnosti. Zadatak u kojem su se pojavljivale jednake vjerojatnosti im je bilo najteže riješiti. Razlike u uspješnosti rješavanja zadataka uočena je među različitim dobnim skupinama, ali su bile manje značajne s poodmakom dobi. Opažene su i razlike, manjeg opsega, između spolova.

Autori kažu kako bi učenike trebalo poučavati o vjerojatnosti u višim razredima osnovne škole, ali da im se u niže razrede uvedu vjerojatnosni problemi koje učenici mogu vrlo lagano razumjeti. Pojmovi poput moguće, nemoguće, manje vjerojatno, jednako vjerojatno, kao što je i dokazano, moguće je prikazati učenicima jer je vjerojatnost vrlo bitna za razumijevanje drugih dijelova matematike. (Hodnik-Čadež i Škrbec, 2011)

3.6. Pravedna i nepravedna igra

Uz učenje vjerojatnosti usko se vežu i igre na sreću. U nastavku ćemo pokazati nekoliko igara koje mogu potaknuti učenika da samostalno uoči i odluči je li igra pravedna ili nije.

Za svaku od ovih igara potrebno je, nakon postavljanja problema, pitati učenike što oni smatraju je li igra pravedna ili ne? Nakon toga učenici odigraju igru određeni broj puta.

Igra 1.

Tri učenika su u grupi i dobiju dvije kovanice te ih nasumično bacaju. Za svaku rundu bačenih kovanica jedan od učenika dobit će bod preteći pravila:

- Igrač 1 dobije bod: dvije glave
- Igrač 2 dobije bod: dva pisma
- Igrač 3 dobije bod: jedan od svakog (pismo, glava)

Preporuča se barem 20 bacanja novčića

Igra 2.

Učenici igraju u paru bacajući dva novčića. Za svaku rundu bačenih kovanica jedan od učenika dobiva bod preteći pravila:

Igrač 1 dobije bod: dvije iste sličice (dva pisma ili dvije glave)

Igrač 2 dobije bod: jedan od svakoga (pismo, glava)

(Van de Walle i sur., 2019)

Nakon što je igra odigrana, učenici prikazuju svoje podatke prikupljene igrajući igru. Moguće je da će učenici prikazivati svoje podatke na razne načine (liste, dijagrami, tablice, ...). Nakon obrade podataka, zajedno s učenicima zaključimo je li igra pravedna ili nije. (Van de Walle i sur., 2019)

4. Kurikul nastavnog predmeta matematike

Pod kurikulumom podrazumijeva se i matematička pismenost koja je jedan od važnijih preduvjeta za razvoj matematičkih strategija, vještina, te cjeloživotnog učenja. Učenje i poučavanje Matematike potiče preciznost, sustavnost, kreativnost, kritičko promišljanje i apstraktno mišljenje, a ostvaruje se povezivanjem procesa i domena. Ta dvodimenzionalnost očituje se u ishodima i doprinosi stjecanju matematičkih kompetencija. (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019)

4.1. Matematički procesi i domene

Velike matematičke ideje, poput broja, oblika, struktura i promjena, temelj su razvoja matematike. Te ideje centar su za gradnju matematičkih koncepata, te razvijaju oko sebe grane matematike. Matematički koncepti grupirani su u domene, a cjelovitim pristupom usvajanja ovih domena razvijaju se matematičke kompetencije. (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019)

„Domene (MZOS 2016):

- Brojevi
- Algebra i funkcije
- Oblik i prostor
- Mjerenje
- Podatci, statistika i vjerojatnost.“

„Matematički procesi (MZOS 2016):

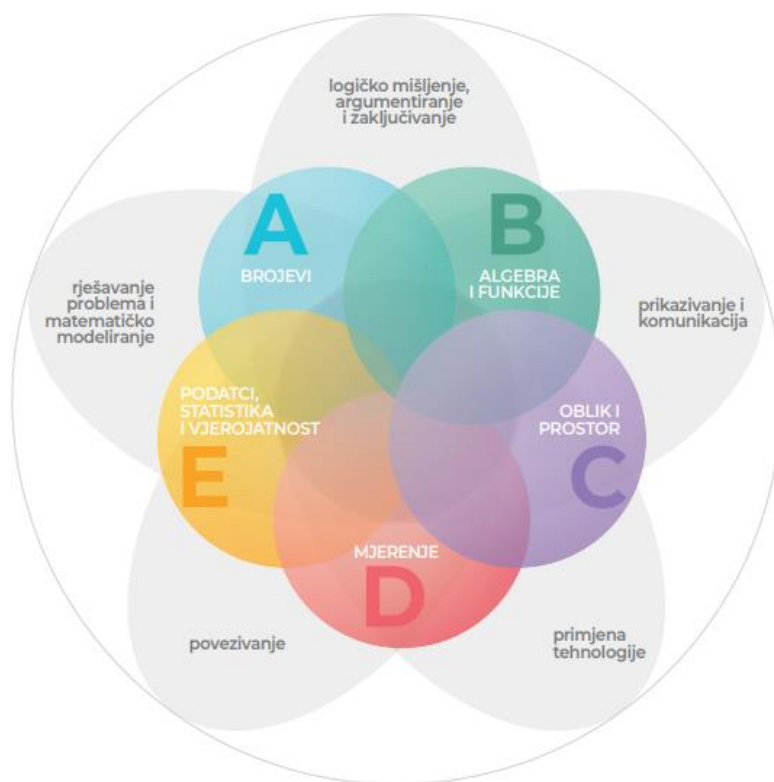
- prikazivanje i komunikacija
- povezivanje
- logičko mišljenje

- argumentiranje i zaključivanje
- rješavanje problema
- matematičko modeliranje
- primjena tehnologije“

(Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019, str. 11,12)

4.1.1. Domena Podatci, statistika i vjerojatnost:

„Domena Podatci, statistika i vjerojatnost bavi se prikupljanjem, razvrstavanjem, obradom, analizom i prikazivanjem podataka u odgovarajućem obliku. Podatke dane grafičkim ili nekim drugim prikazom treba znati očitati te ih ispravno protumačiti i upotrijebiti. Sve se to postiže koristeći se jezikom statistike. Ona podrazumijeva uporabu matematičkoga aparata kojim se računaju mjere srednje vrijednosti, mjere raspršenja, mjere položaja i korelacije podataka. Nakon prepoznavanja veza među podacima i promatrajući frekvencije pojavljivanja, dolazi se do pojma vjerojatnosti. Određuje se broj povoljnih i svih mogućih ishoda, procjenjuje se i izračunava vjerojatnost što nam omogućuje predviđanje događaja.“ (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019, str. 14)

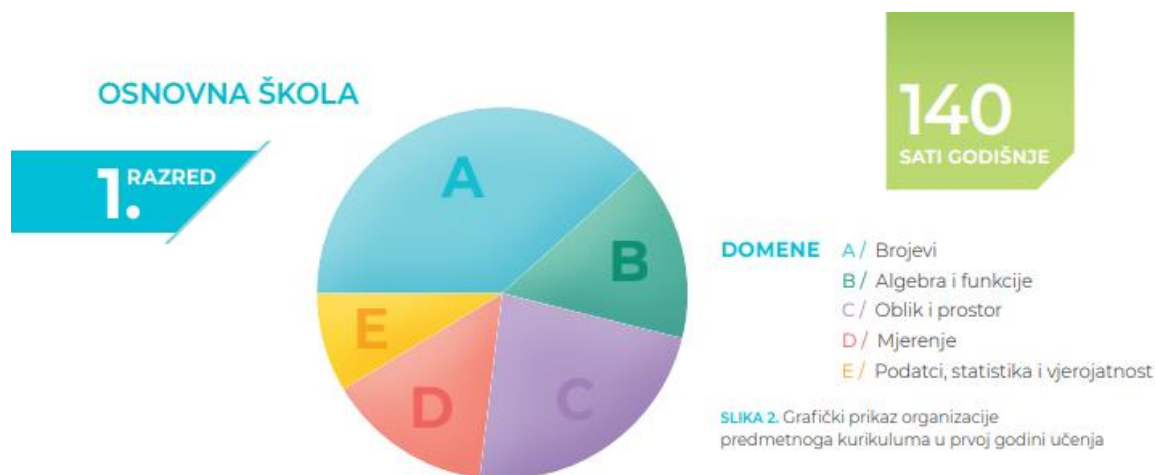


Slika 3. Procesi i domene kurikula

(https://skolazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf str. 14, pristupljeno 10. kolovoza 2021.)

4.2. Zastupljenost vjerojatnosti u kurikulumu po razredima

1. razred



Slika 4. Prikaz organizacije i domena za 1. razred

(https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf str. 16, pristupljeno 10. kolovoza 2021.)

U 1. razredu prema CKR-u podaci, statistika i vjerojatnost zauzimaju tek 7.14% od ukupnog fonda sati koji su predviđeni. (Loparić, 2019)

ODGOJNO-OBRAZIVNI ISHOD

MAT OŠ E.1.1. Služi se podacima i prikazuje ih piktogramima i jednostavnim tablicama.

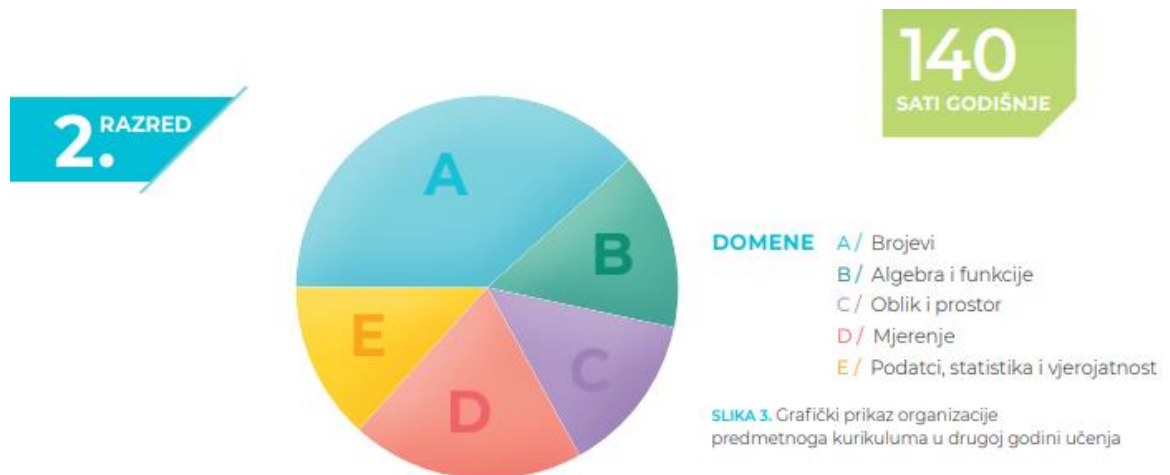
RAZRADA ODGOJNO-OBRAZOVNOG ISHODA MAT

- Određuje skup prema nekome svojstvu.
- Prebrojava članove skupa. Uspoređuje skupove.
- Prikazuje iste matematičke pojmove na različite načine (crtež, skup, piktogram i jednostavna tablica). Čita i tumači podatke prikazane piktogramima i jednostavnim tablicama.

Prošireni sadržaji: Prikazivanje podataka različitih nastavnih predmeta. Korelacija s Hrvatskim jezikom, Prirodom i društvom, međupredmetnim temama Učiti kako učiti i Poduzetništvo.

(Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019)

2. razred



Slika 5. Prikaz organizacije i domena za 2. razred

(https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf str. 24, pristupljeno 10. kolovoza 2021.)

U 2. razredu prema CKR-u podaci, statistika i vjerojatnost zauzimaju 11.11% od ukupnog fonda sati koji su predviđeni. (Loparić, 2019)

ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHOD

MAT OŠ E.2.1. Koristi se podacima iz neposredne okoline.

RAZRADA ODGOJNO-OBRAZOVNOG ISHODA

- Promatra pojave i bilježi podatke o njima.
- Razvrstava prikupljene podatke i prikazuje ih jednostavnim tablicama ili piktogramima.
- Tumači podatke iz jednostavnih tablica i piktograma.
- Provodi jednostavna istraživanja te analizira i prikazuje podatke.

Korelacija s Prirodom i društvom te međupredmetnim temama Učiti kako učiti i Poduzetništvo.

ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHOD

MAT OŠ E.2.2. Određuje je li neki događaj moguć ili nemoguć.

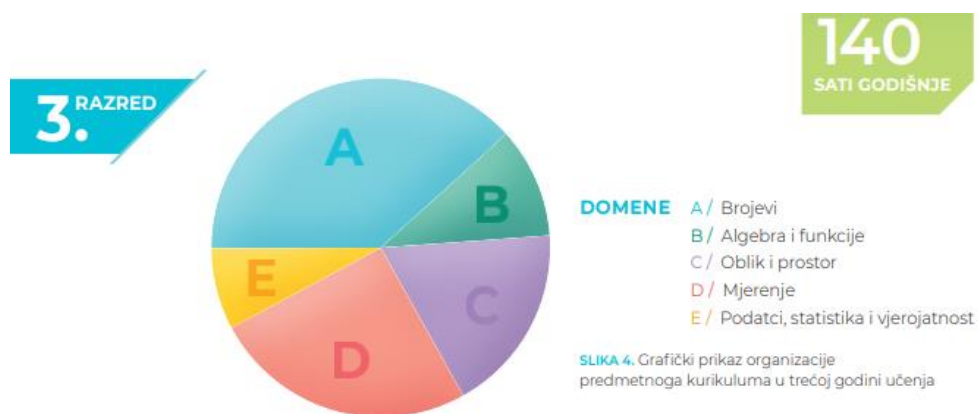
RAZRADA ODGOJNO-OBRAZOVNOG ISHODA

- U različitim situacijama predviđa moguće i nemoguće događaje.
- Objašnjava zašto je neki događaj (ne)moguć.

Korelacija s Hrvatskim jezikom, Prirodom i društvom, međupredmetnim temama Osobni i socijalni razvoj, Učiti kako učiti, Poduzetništvo, Zdravlje, Održivi razvoj, Građanski odgoj i obrazovanje

(Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019)

3. razred



Slika 6. Prikaz organizacije i donema za 3. razred

(https://skolazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf str. 34, pristupljeno 10. kolovoza 2021.)

U 3. razredu prema CKR-u podaci, statistika i vjerojatnost zauzimaju tek 6.67% od ukupnog fonda sati koji su predviđeni. (Loparić, 2019)

ODGOJNO OBRAZOVNI ISHOD:

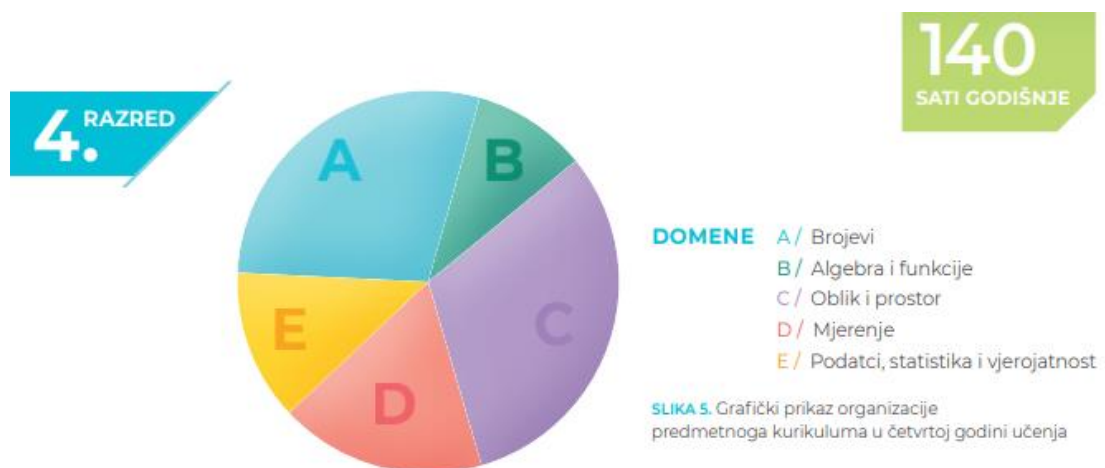
MAT OŠ E.3.1. Služi se različitim prikazima podataka.

RAZRADA ODGOJNO-OBRAZOVNOG ISHODA

- Nabraja različite vrste prikaza podataka.
- Koristi se nazivima redak i stupac. Prikazuje podatke u tablicama i stupčastim dijagramima.
- Služi se različitim prikazima podataka.

Prošireni sadržaji: Prikazuje podatke dobivene u razrednim projektima služeći se primjerenom tehnologijom. Korelacija s Hrvatskim jezikom, Informatikom i međupredmetnim temama Učiti kako učiti, Uporaba informacijsko-komunikacijske tehnologije, Poduzetništvo, Održivi razvoj i Građanski odgoj i obrazovanje. (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019)

4. razred



Slika 7. Prikaz organizacije i domena za 4. razred

(https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf str. 44, pristupljeno 10. kolovoza 2021.)

U 4. razredu prema CKR-u podaci, statistika i vjerojatnost zauzimaju tek 7.69% od ukupnog fonda sati koji su predviđeni. (Loparić, 2019)

ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHOD

MAT OŠ E.4.1. Provodi jednostavna istraživanja i analizira dobivene podatke.

RAZRADA ODGOJNO-OBRAZOVNOG ISHODA

- Osmišljava i provodi jednostavna istraživanja u svojoj neposrednoj okolini.
- Prikuplja podatke, razvrstava ih i prikazuje neformalno i formalno. Čita podatke iz tablica i jednostavnih dijagrama.

Korelacija s Prirodom i društvom i međupredmetnim temama Uporaba informacijsko-komunikacijske tehnologije, Učiti kako učiti, Poduzetništvo, Zdravlje, Održivi razvoj i Građanski odgoj i obrazovanje. (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019)

ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHOD

MAT OŠ E.4.2. Opisuje vjerojatnost događaja.

RAZRADA ODGOJNO-OBRAZOVNOG ISHODA

- U razgovoru iskazuje mogućnosti. Uspoređuje ishode riječima vjerojatniji, manje vjerojatan, najvjerojatniji.

Korelacija s Hrvatskim jezikom, Prirodom i društvom i međupredmetnim temama Osobni i socijalni razvoj, Učiti kako učiti, Poduzetništvo, Zdravlje, Održivi razvoj i Građanski odgoj i obrazovanje. (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019)

4.3. Vjerojatnost u kurikulumima najbolje plasiranih zemalja na PISA testovima

PISA stoji za Programme for International Student Assessment. Osim kompetencija kod učenika od 15 godina u ključnim područjima: čitalačkoj, matematičkoj i prirodoslovnoj

pismenosti, PISA ispituje i druge međukurikularne kompetencije koje će učenicima biti važne u životu odrasle osobe, poput financijske pismenosti, sposobnosti rješavanja problema, globalnih kompetencija, kreativnog mišljenja i dr. (PISA, n. d.)

U području matematičke pismenosti PISA-e 2012. godine test je sadržavao čak trećinu svih zadataka iz područja podataka, statistike i vjerojatnosti. Zbog toga nije ni čudo što su najbolje rezultate u ovom programu imale upravo države poput Singapura, Hong Konga, Koreje i Japana jer je u tim državama stavljen veliki naglasak na poučavanje vjerojatnosti i statistike od najniže dobi. (Loparić, 2019)

U svrhu prikupljanja najboljih strategija za učenje i razumijevanje vjerojatnosti edukatori iz mnogih zemalja dodaju vjerojatnost u svoj kurikulum u različite edukacijske razine. No, uključivanje teme vjerojatnosti u kurikulum ne znači da će biti ispravno poučavana i usvojena. Mnogostvo raznih pogleda na vjerojatnost najčešće nisu vezane sa drugim područjima, te može biti vrlo izazovna za učitelje i učenike. (Batanero i sur., 2016)

U Singapuru se od 1. razreda uvodi rješavanje vjerojatnosnih problema korištenjem tablica i grafičkih prikaza, te izračunavanje prosjeka. (Loparić, 2019)

U Hong Kongu i Koreji vjerojatnost se kao pojam uvodi tek u 6. razredu, ali od 1. razreda uče o analiziranju podataka iz statističkih prikaza. (Loparić, 2019)

Za Japan je specifično kako nemaju istaknute cjeline vjerojatnost i statistika već imaju područja unutar matematičkih odnosa koji imaju elemente vjerojatnosti. (Loparić, 2019)

Pregledom kurikula za početnu nastavu matematike iz drugih država možemo vidjeti da su sadržaji iz statistike prisutni već u 1. razredu, no sa vjerojatnošću se počinje tek kasnije. Istraživanje iz Slovenije (Hodnik-Čadež i Škrbec, 2011) pokazalo je kako učenici mogu svladati pojmove vjerojatnosti već u 1. razredu. Novija istraživanja upućuju na važnost učenja vjerojatnosti u 1. razredu osnovne škole, ali s time da veliki naglasak stavljaju na iskustveno učenje. 2009. godine Andrew je pokazao kako su rezultati učenika koji su koristili vjerojatnost eksperimentiranjem značajno bolji od onih koji su učili vjerojatnost korištenjem formula. (Loparić, 2019)

Početak ovog stoljeća na Nacionalnom skupu učitelja matematike (NCTM 2000) u SAD-u, izdani su idući prijedlozi za učenike od 3. do 5. razreda (u našim školama ta djeca pohađaju 2.-4. razred):

- Opisati događaj kao moguć i slabo moguć i pokušati u razgovoru s učenicima koristiti što više riječi poput siguran, jednako moguć i nemoguć događaj
- Predvidjeti vjerojatnost ishoda jednostavnih eksperimenata i testova predviđanja
- Razumjeti da vjerojatnost može poprimiti vrijednosti između 0 i 1

Ove preporuke uvedene su u većine kurikula i raznih vodiča za učitelje osnovnih škola.

(Tsakiridou i Vavyla, 2015)

5. Elementi vjerojatnosti u udžbenicima početne nastave matematike

Detaljnim pregledom udžbenika iz 2010. godine (Markovac, (2010), *Matematika 1, Matematika 2, Matematika 3, Matematika 4*) nije uočeno da sadrže teme iz vjerojatnosti. Navest ćemo primjere iz ovog područja koji se susreću u novim udžbenicima (Jakovljević Rogić i sur., (2021), *Moj sretni broj 1, Moj sretni broj 2, Moj sretni broj 3, Moj sretni broj 4*).

Uspoređujući udžbenik *Moj sretni broj 2* (Jakovljević Rogić i sur., 2021) s onim 11 godina starijim možemo uočiti kako se u ovom udžbeniku također ne nalaze poglavlja o vjerojatnosti, ali se pojmovi vjerojatnosti provlače kroz različita poglavlja udžbenika:

- Oduzimanje (32 – 20): „Izreci o životinji dvije istinite tvrdnje koje sadrže izraze **moгуće je / nemoguće je:**“ str. 38 (slika 8.)
- Oduzimanje (74 - 26): „**Je li moguće** da su zasjale samo crvene lampice?“ str. 46
- Mjerenje vremena: „S obzirom na broj dana u veljači jedna godina ima 365 ili 366 dana. **Koliko se to često događa?**“ str. 58

Zrinka je imala 32 sličice različitih životinja.
Izdvojila je 20 sličica i odnijela ih u školu za izradu plakata.
Koliko je sličica ostalo Zrinki?



32 - 20 = ?
Razmislimo: 32 = 3 D i 2 J
20 = 2 D i 0 J
Od 3 desetice oduzmemo 2 desetice.
Ostala je 1 desetica i 2 jedinice.
To je .
Zrinki je ostalo sličica.

Zapisujemo:
32 - 20 =



32 - 20 = jer je 12 + = 32

Izaberi životinju s fotografije. Izreci o životinji dvije istinite tvrdnje koje sadrže izraze **moгуće je** / **nemoguće je**.

Na primjer: Zebri je **moгуće** vidjeti kako trči.

Zebri je **nemoguće** vidjeti kako leti s cvijeta na cvijet.

Slika 8. Prikaz zadatka s moguće i nemoguće

(<https://www.e-sfera.hr/prelistaj-udzbenik/33dd561b-c57f-41cc-82d2-67dad9ea20a2> str. 38, pristupljeno

11. kolovoza 2021.)

Proučavajući dodatni udžbenik, iz iste godine izdavanja, Matematička mreža 2 (Maja Cindrić i Irena Mišurac, (2021.)) možemo vidjeti kako on ima zasebno poglavlje posvećeno razvoju i poduci vjerojatnosti (slika 9.).

MOGUĆE – NEMOGUĆE

Danas ću dobiti 5 iz matematike. **Moguće je.** **PETAK 24. 9.**

Ja ću sutra dobiti 5 iz matematike. **Nemoguće je. Sutra je subota. Nema nastave.**

1. Ela izvlači jednu pikulu iz posude. Odredi je li događaj moguć ili nemoguć tako da zaokružiš odgovarajuću riječ.

	<input type="checkbox"/> Moguće	<input type="checkbox"/> Nemoguće
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> Moguće	<input type="checkbox"/> Nemoguće
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> Moguće	<input type="checkbox"/> Nemoguće

2. Ela izvlači dvije pikule iz posude. Odredi je li događaj moguć ili nemoguć tako da zaokružiš odgovarajuću riječ.

	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> Moguće	<input type="checkbox"/> Nemoguće
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> Moguće	<input type="checkbox"/> Nemoguće
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> Moguće	<input type="checkbox"/> Nemoguće
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> Moguće	<input type="checkbox"/> Nemoguće

3. Ela izvlači tri pikule iz posude. Nacrtaј sve moguće ishode.

4. Rita baca kockicu. Odredi je li događaj moguć ili nemoguć tako da zaokružiš odgovarajuću riječ.

Kockica će se okrenuti na broj manji od broja 10.	<input type="checkbox"/> Moguće	<input type="checkbox"/> Nemoguće
Kockica će se okrenuti na broj veći od broja 10.	<input type="checkbox"/> Moguće	<input type="checkbox"/> Nemoguće
Kockica će se okrenuti na broj manji od broja 6.	<input type="checkbox"/> Moguće	<input type="checkbox"/> Nemoguće
Kockica će se okrenuti na broj veći od broja 5.	<input type="checkbox"/> Moguće	<input type="checkbox"/> Nemoguće

Ispiši sve moguće ishode bacanja kockice.

5. Ante baca dvije kockice. Odredi je li događaj moguć ili nemoguć tako da zaokružiš odgovarajuću riječ.

Kockice će se okrenuti na brojeve čiji je zbroj manji od broja 5.	<input type="checkbox"/> Moguće	<input type="checkbox"/> Nemoguće
---	---------------------------------	-----------------------------------

Ispiši sve moguće ishode.

Kockice će se okrenuti na brojeve čiji je zbroj manji od broja 10.	<input type="checkbox"/> Moguće	<input type="checkbox"/> Nemoguće
Kockice će se okrenuti na brojeve čiji je zbroj veći od broja 10.	<input type="checkbox"/> Moguće	<input type="checkbox"/> Nemoguće

Ispiši sve moguće ishode.

Kockice će se okrenuti na brojeve čiji je zbroj veći od broja 12.	<input type="checkbox"/> Moguće	<input type="checkbox"/> Nemoguće
---	---------------------------------	-----------------------------------

6. Rita baca tri kockice. Ispiši sve ishode bacanja da zbroj bude manji od 7.

Slika 9. Poglavlje posvećeno mogućem i nemogućem događaju

(<https://www.e-sfera.hr/prelistaj-udzbenik/de44776e-d6df-48c5-87da-524b301a3059> str. 6,7, pristupljeno 11. kolovoza 2021.)

Udžbenik Moj sretni broj 4 (Jakovljević Rogić, Miklec i Prtajin, 2021) sadrži vjerojatnosne pojmove u zasebnim cjelinama. Prva cjelina objašnjava zašto su bitna istraživanja, kako ih provesti, kako obraditi podatke, kako ih zapisati, te na kraju zaključiti. Na nju se nastavlja cjelina Siguran, moguć i nemoguć događaj koja ima 5 pitanja tipična iz područja vjerojatnosti. (slika 10.)

Siguran, moguć i nemoguć događaj

Igrač baca igraću kockicu. Odredi je li događaj moguć ili nemoguć.


Kockica će se okrenuti na broj manji od 8. MOGUĆE NEMOGUĆE

Kockica će se okrenuti na broj veći od 6. MOGUĆE NEMOGUĆE

ZNAM

Iva i Tin su u bakinu vrtu ubrali rajčice i paprike i njima napunili nekoliko košara. Odlučili su se poigrati. Tin će bez gledanja vaditi po jedan komad povrća iz svake košare.


Promotri košare. Zaokruži riječ koja odgovara tvrdnji.



Tin će izvaditi rajčicu. NEMOGUĆE MOGUĆE SIGURNO

Tin će izvaditi papriku. NEMOGUĆE MOGUĆE SIGURNO

Događaj koji će se uvijek ostvariti je **siguran**.
Događaj koji se ne može nikada ostvariti je **nemoguć**.



Tin će izvaditi rajčicu. NEMOGUĆE MOGUĆE SIGURNO

Tin će izvaditi papriku. NEMOGUĆE MOGUĆE SIGURNO

Događaj koji se može ostvariti je **moguć**.

Vjerojatnije je da će Tin izvaditi rajčicu nego papriku.
Manje je vjerojatno da će Tin izvaditi papriku, a ne rajčicu.

Dopuni rečenicu.
Tin će iz ove košare najvjerojatnije izvaditi _____, a ne _____.

NEMOGUĆE
DOGABAJ




M O G U Ć I D O G A Ā A J I

SIGURAN
DOGABAJ

Neki su mogući događaji **vjerojatniji** od drugih.

Navedi jedan događaj koji je siguran, jedan koji je moguć i jedan koji je nemoguć.


- Odredi je li događaj siguran, moguć ili nemoguć i spoji svaku košaru s odgovarajućim mjestom na dužini. Iva će bez gledanja iz košare izvaditi papriku.




NEMOGUĆE
DOGABAJ





M O G U Ć I D O G A Ā A J I

SIGURAN
DOGABAJ
- Zaokruži odgovarajuće slovo da bi tvrdnja bila točna. Iz ove je košare



 - sigurno da će se izvaditi rajčica
 - sigurno da će se izvaditi paprika
 - moguće da će se izvaditi rajčica
 - moguće da će se izvaditi paprika
 - vjerojatnije da će se izvaditi rajčica nego paprika
 - vjerojatnije da će se izvaditi paprika nego rajčica.
- Označi košaru iz koje je jednako vjerojatno da ćeš bez gledanja izvaditi rajčicu kao i papriku.




- Dopuni rečenicu. Iz ove je košare manje vjerojatno da ćeš bez gledanja izvaditi _____, a ne _____.
- Označi košare brojevima od 1 do 4 tako da broj 1 označava košaru iz koje je bez gledanja najvjerojatnije izvaditi papriku, a broj 4 označava košaru iz koje je to najmanje vjerojatno.

Slika 10. Poglavlje o sigurnom, mogućem i nemogućem događaju

(<https://www.e-sfera.hr/prelistaj-udzbenik/187787b6-9db2-4813-8932-2b9da5ee9846> str. 12,13, pristupljeno 11.kolovoza 2021.)

ZAKLJUČAK

Teorija vjerojatnosti danas je jedan od najbitnijih alata kojim se ljudi koriste u svakodnevnom životu i naravno poslu. Iako je teorija vjerojatnosti krenula kao proučavanje problema igara na sreću, prerasla je u značajno područje matematike jer je u današnjem svijetu potrebno imati sposobnosti snalaženja u situacijama, predviđanja, odlučivanja pomoću vjerojatnosti, rješavanja problema i razvitak samog učenja.

Učenici od 1. do 4. razreda vrlo lako stječu nova znanja, a iz područja vjerojatnosti, prema Piagetu, u razdoblju od 9 do 12 godina. Uz samo znanje i snalaženje u rješavanju problema, vjerojatnost je bitna za učenike jer uče prihvaćati da se mogu dogoditi i negativne stvari i da ih nije uvijek moguće predvidjeti sa sigurnošću. S time učenici prikupljaju iskustva za rješavanje problema.

Hrvatska je 2016. godine u cjelovitoj kurikularnoj reformi napravila iskorak u području vjerojatnosti. Uvođenjem cjelina Podaci, statistika i vjerojatnost podigla je razinu svijesti o ovom vrlo bitnom području. S novim elementima u Kurikulu nastavnog predmeta matematike počeli su se mijenjati i udžbenici koji su doživjeli procvat, ne samo u načinu implementiranja vjerojatnosti u različite probleme i zadatke, već i u broju pitanja otvorenog tipa, kojih je, izuzev u geometriji, bilo vrlo malo. Ove promjene će zasigurno pridonijeti boljem razumijevanju pojmova iz područja vjerojatnosti.

POPIS LITERATURE

1. Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., Sánchez, E. (2016), *Research on teaching and learning probability*, SpringerOpen.
2. DeGroot, M. H., Schervish, M. J. (2013). *Probability and statistics*. Pearson Education, Inc., pristupljeno 11. kolovoza 2021. na: <http://bio5495.wustl.edu/Probability/Readings/DeGroot4thEdition.pdf>
3. Hodnik-Čadež, T., Škrbec, M. (2011), Understanding the Concepts in Probability of Ore-School and Early School Children, *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 7 (4), 263-279
4. Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2021), *Moj sretni broj 1*, Školska knjiga, Zagreb, pristupljeno 9. kolovoza 2021. na: <https://www.e-sfera.hr/prelistaj-udzbenik/fea171dd-7f4f-46f1-b7c9-ab40d504b4b1>
5. Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2021), *Moj sretni broj 2*, Školska knjiga, Zagreb, pristupljeno 9. kolovoza 2021. na: <https://www.e-sfera.hr/prelistaj-udzbenik/33dd561b-c57f-41cc-82d2-67dad9ea20a2>
6. Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2021), *Moj sretni broj 3*, Školska knjiga, Zagreb, pristupljeno 9. kolovoza 2021. na: <https://www.e-sfera.hr/prelistaj-udzbenik/a919b228-c4b8-4adc-af5c-c5c30905c990>
7. Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2021), *Moj sretni broj 4*, Školska knjiga, Zagreb, pristupljeno 9. kolovoza 2021. na: <https://www.e-sfera.hr/prelistaj-udzbenik/187787b6-9db2-4813-8932-2b9da5ee9846>
8. Loparić, S. (2019) Vjerojatnost i statistika – zašto, kada, kako? *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 20(80), 45-51.
9. Markovac, J. (2010), *Matematika 1*, ALFA d.d., Zagreb
10. Markovac, J. (2010), *Matematika 2*, ALFA d.d., Zagreb
11. Markovac, J. (2010), *Matematika 3*, ALFA d.d., Zagreb
12. Markovac, J. (2010), *Matematika 4*, ALFA d.d., Zagreb
13. Maširević, D. J., Kozić, A. (2015), Geometrijska vjerojatnost u svakodnevnom životu, *Osječki matematički list (15)*, 19-31
14. Maširević, D. J., Mikić, M. (2019), Kombinatorika i vjerojatnost – zajedno kroz ples, *Osječki matematički list (19)*, 123-136
15. Ministarstvo znanosti i obrazovanja (2019): *Kurikulum nastavnog predmeta matematika za osnovne škole i gimnazije*, NN 7/2019, NN 10/2019 Zagreb

16. Parzen, E. (1960), *Modern Probability Theory and It's Applications*, John Wiley & Sons, Inc., Canada
17. PISA, Glavna stranica: <https://www.oecd.org/pisa/>, inovacije: <https://www.oecd.org/pisa/innovation/>, rezultati 2012. godine: <https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results.htm>, nesigurnost i podaci: <https://pisa2022-maths.oecd.org/#Uncertainty-and-Data>, pristupljeno 10.kolovoza 2021.
18. Polaki, M. V. (2002), *Assesing and tracing the development of Basotho elementary student's growth in probabilistic thinking*, ICOTS6
19. Reichenbach, H. (1971), *The Theory of Probability*, *California library reprint series*, University of California Press, pristupljeno 11. kolovoza 2021. na: https://books.google.hr/books?id=WUm_2lAvj2cC&dq=probability&lr=&source=gbs_navlinks_s
20. Tsakiridou, H., Vavyla, E. (2015). Probability concepts in primary school. *American Journal of Educational Research*, 3 (4), 533-540, pristupljeno 11. kolovoza 2021. na: https://www.researchgate.net/publication/276078729_Probability_Concepts_in_Primary_School
21. Uspensky, J. V. (1937), *Introduction to mathematical probability*, McGraw-Hill book company, Inc., pristupljeno 11. kolovoza 2021. na: <http://dspace.gipe.ac.in/xmlui/bitstream/handle/10973/32532/GIPE-020758.pdf?sequence=3&isAllowed=y>
22. Van de Walle, J. A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M. (2019), *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally*, Pearson Education, Inc.
23. Zapata-Cardona, L. (2010), *Teacher's understanding of student's conceptions about chance: an expert-novice contrast*, ICOTS8

IZJAVA

o samostalnoj izradi **Diplomskog rada**

Izjavljujem pod punom materijalnom i moralnom odgovornošću da sam ovaj rad izradio samostalno te da u njemu nema kopiranih ili prepisanih dijelova teksta tuđih radova, a da nisu propisano označeni kao citati s navedenim izvorom iz kojeg su preneseni.

U Osijeku, _____

(ime i prezime tiskanim slovima)

(vlastoručni potpis)