Razvijanje logičkog mišljenja, argumentiranja i zaključivanja u početnoj nastavi matemtike

Kos, Sonja

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Education / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:141:428046

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-04-01**

Repository / Repozitorij:

FOOZOS Repository - Repository of the Faculty of Education

zir.nsk.hr

DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI

Sonja Kos

RAZVIJANJE LOGIČKOG MIŠLJENJA, ARGUMENTIRANJA I ZAKLJUČIVANJA U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

DIPLOMSKI RAD

Osijek, 2015.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij
Učiteljski studij

RAZVIJANJE LOGIČKOG MIŠLJENJA, ARGUMENTIRANJA I ZAKLJUČIVANJA U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

DIPLOMSKI RAD

Predmet: Matematika i nadareni učenici
Mentor: Izv. prof. dr. sc. Zdenka Kolar – Begović
Studentica: Sonja Kos
Matični broj: 2114
Modul: B

Osijek
Prosinac, 2015.

SAŽETAK

Parlament i Vijeće Europske unije predlažu razvoj matematičke kompetencije kao jedne od temeljnih kompetencija za osobni razvoj i napredak u društvu. Nacionalni okvirni kurikul donesen 2011. godine kao temeljni dokument za obrazovanje učenika u osnovnim i srednjim školama Republike Hrvatske, uvažava preporučene ključne kompetencije. Matematičko područje kurikuluma organizirano je u dvije dimenzije: matematički koncepti i matematički procesi. Matematički procesi uključuju proces *Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje*, koji je predmet ovog istraživanja provedenog sa skupinom desetogodišnjaka s posebnim interesom za matematiku. Cilj istraživanja je bio ustanoviti koliko su odabrani zadaci i nastavne aktivnosti primjereni razvojnoj dobi učenika i doprinose li razvijanju procesa *Logičkog mišljenja, argumentiranja i zaključivanja*. Rezultati provedenog istraživanja ukazuju da su učenici sposobni pratiti slijed logičkog rasuđivanja, ali imaju poteškoća u komunikaciji vlastitog mišljenja i tumačenju istinitosti složenih matematičkih sudova; u stanju su nastaviti jednostavne obrasce, ali ne i složene te primijeniti vlastita znanja i vještine tijekom aktivnog poučavanja strategijom vođenog otkrivanja kako bi prepoznali pravilnost u zadacima geometrijskog karaktera. Odabrani zadaci i nastavne aktivnosti primjerene su i poticajne za učenike te doprinose razvijanju odgovarajućih matematičkih procesa.

KLJUČNE RIJEČI: matematička kompetencija, matematički procesi, vođeno učenje otkrivanjem, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, akcijsko istraživanje

ABSTRACT

The European Parliament and the European Council propose to develop mathematical competence as one of the fundamental competencies for personal development and social progress. The national curriculum, adopted in 2011 as the fundamental document for educating students in primary and secondary schools in the Republic of Croatia, respects the recommended competencies. Mathematical area of the curriculum is organized in two domains: the mathematical concepts and mathematical processes. Mathematical processes involve the process of logical thinking, argumentation and reasoning, the subject of this study, which was conducted with a group of ten year olds with a special interest in mathematics. The aim of the study was to establish in which extend the selected tasks and learning activities are appropriate to students' developmental age and if they contribute to developing the process of logical thinking, argumentation and reasoning. The results of the study show that students are able to

follow the sequence of logical reasoning, but they have difficulty communicating their own opinions; students have difficulties in interpreting the truth of complex mathematical statements; students are able to continue simple patterns, but have difficulty with complex patterns; students are able to apply their knowledge and skills in active learning using the strategy of guided discovery to identify regularity in geometry. Selected tasks and learning activities are appropriate and stimulating for students and contribute to the development of appropriate mathematical processes.

KEY WORDS: mathematical competence, mathematical processes, guided learning by discovering, logical thinking, argumentation and reasoning, action research

Kazalo

1. UVOD

Predmet mnogih istraživanja srednjoškolskog i osnovnoškolskog obrazovanja jest procjena učeničkih sposobnosti rasuđivanja i dokazivanja u nastavi matematike. Stylianides (2007.) je proveo istraživanje s učenicima 3. razreda, koje je pokazalo da su učenici sposobni već u nižim razredima osnovne škole donositi argumente koji predstavljaju valjane matematičke dokaze, premda korišteni komunikacijski obrasci nisu slijedili konvencije dokazivanja u disciplini matematike. Uloga učitelja je stvaranje okoline koja će poticati učenika na razvijanje sposobnosti rasuđivanja, argumentiranja i zaključivanja. Bieda (2013.) je proveo istraživanje o zastupljenosti zadataka zaključivanja i dokazivanja u sedam udžbenika osnovne škole. Ustanovio je da su zadaci zaključivanja i dokazivanja u udžbenicima zastupljeni u vrlo malom postotku s obzirom na pregledani materijal. Od ukupno 28 210 problemskih zadataka u sedam udžbenika samo 1050 zadataka, što čini 3.7% ukupnog broja zadataka, odnosilo se na zadatke u kojima je bilo zastupljeno zaključivanje i dokazivanje. Bieda (2013.) smatra da je potrebno daljnje istraživanje o tipovima zadataka koji se koriste kako bi se potaknulo učenike u razmišljanju i dokazivanju.

Dokaz je osnova matematičkog razumijevanja i bitan je za razvoj matematičkog znanja i matematičkog komuniciranja (Stylianides, 2006.). Ideja uključivanja dokaza u učenička matematička iskustva u ranom školovanju nailazi na probleme jer se postavlja pitanje što bi se moglo smatrati dokazom u nižim razredima osnovne škole. Unatoč povećanom razumijevanju uloge dokaza u matematičkom iskustvu učenika u svim razredima, mali broj istraživanja se usmjerio na problem razumijevanja i karakteriziranja pojma dokaza u osnovnom školstvu. Osim toga, postoji ustezanje u literaturi o tome kakve se nastavne aktivnosti ili argumenti učenika te dobi mogu prepoznati kao dokazivanje (Zack i Read, 2003., 2004., prema Bieda, 2013.). Stylianides (2006.) je prihvaćanje argumenata kao dokaza temeljio na načelima *intelektualne iskrenosti* i *kontinuuma* (neprekidnosti). Načelo intelektualne iskrenosti kaže da bi pojam dokaza u školskoj matematici trebao biti koncipiran tako da je otpočetka iskren matematici kao disciplini i poštujući razvojnu dob učenika na nastavnom satu matematike, dok načelo kontinuuma (neprekidnosti) podrazumijeva kontinuitet u koncepciji dokaza tako da iskustva učenika s dokazom na različitim razinama matematičkog obrazovanja budu povezana. Istraživanja o rasuđivanju i dokazivanju u srednjoškolskom obrazovanju uglavnom provjeravaju sposobnosti učenika kroz intervjue i pisane procjene, dok su istraživanja koja propitkuju ove matematičke sposobnosti u osnovnoškolskom obrazovanju usmjerena na mogućnosti razvoja sposobnosti učenika za generalizaciju te induktivno i deduktivno rasuđivanje pomoću studija slučaja i opservacije dizajniranog procesa poučavanja (Bieda, 2013.). Opisuju se nastavni sati na kojima se zadaci dokazivanja rješavaju uz učiteljeva djelotvorna objašnjenja i pitanja koja potiču učenike na postavljanje i obrazlaganje tvrdnji (Zack i Read, 2003., 2004., prema Bieda, 2013.). Maher i Martino (1996., prema Bieda, 2013.) proveli su petogodišnje longitudinalno istraživanje, studiju slučaja, s učenicima od 1. do 5. razreda i došli su do zaključka da su učenici sposobni konstruirati dokaz metodom razlikovanja slučajeva u kontekstu kombinatornih problema, bez posebnih uputa nastavnika. Bitnim su prepoznali učioničku kulturu, koja uključuje otvorenu razmjenu ideja za poticanje matematičke argumentacije u nižim razredima osnovne škole (Maher i Martino, 1996., prema Bieda, 2013.).

Međunarodno ispitivanje matematičkih kompetencija učenika *Trends in Mathematics and Science Study* (TIMSS) u svom okvirnom kurikulumu među kognitivnim domenama ističe *znanje*, *primjenu* i *rasuđivanje* (Mullis i sur., 2012.). Prema rezultatima istraživanja TIMSS 2011. (TIMSS 2011. Izvješće o postignutim rezultatima, 2012.), hrvatski učenici četvrtih razreda su se prema nacionalnom prosjeku postignutih rezultata nalazili na 30. mjestu od ukupno 50 zemalja koje su sudjelovale u ovom istraživanju. S obzirom na kognitivne domene učenici su ostvarili 55% točnih odgovora u zadacima koji zahtijevaju znanje, 46% u zadacima primjene i 38% točnih odgovora u zadacima u kojima je bilo potrebno rasuđivati. S obzirom na međunarodne referentne razine, njihovi rezultati točnih odgovora iz zadataka primjene i rasuđivanja su statistički ispod međunarodnog prosjeka, dok su rezultati točnih odgovora iz zadataka koji zahtijevaju znanje jednaki međunarodnom prosjeku. Međunarodni prosjek točnih odgovora s obzirom na kognitivne domene iznosi 55% za činjenično znanje, 50% za primjenu i 40% za rasuđivanje.

Tema ovog diplomskog rada jest prikaz razvoja logičkog mišljenja, argumentiranja i zaključivanja u početnoj nastavi matematike kroz rješavanje tri skupine zadataka:

- rješavanje logičkih zadataka,
- rješavanje zadataka koji zahtijevaju induktivno zaključivanje i
- aktivnost istraživanja pravilnosti u zadacima geometrijskog karaktera.

U radu su prikazani i diskutirani takvi zadaci, provedeni s polaznicima Male matematičke škole, koji omogućuju učenicima matematički rasuđivati, argumentirati sukladno postupcima matematičkog dokaza te komunicirati matematičkim jezikom.

2. TEORIJSKI OKVIR

Prema George Polya (2003., str. 274. – 279.) mlade osobe, prvenstveno učenike osnovnih i srednjih škola je važno naučiti misliti. Učitelj tijekom nastave treba kod učenika poticati usmjerena promišljanja te voljna i produktivna razmišljanja kako bi oni razvili umijeće rješavanja matematičkih zadataka.

Parlament i Vijeće Europske unije predlažu razvijati osam temeljnih kompetencija za osobni razvoj i napredak u društvu:

1. Komunikacija na materinskom jeziku,
2. Komunikacija na stranom jeziku,
3. Matematička kompetencija i temeljne kompetencije u prirodnim znanostima i tehnologiji,
4. Digitalna kompetencija,
5. Kompetencija učenja,
6. Društvena i građanska kompetencija,
7. Smisao za inicijativu i poduzetništvo i
8. Kulturološka senzibilizacija i izražavanje.

U ovome radu obratit ćemo pozornost na matematičku kompetenciju. U preporuci parlamenta i vijeća Europske unije iz 2006. godine matematička kompetencija se opisuje kao *„…sposobnost razvijanja i primjene matematičkog mišljenja u cilju rješavanja niza problema u svakodnevnim situacijama. Oslanjajući se na dobro savladano računanje, naglasak se stavlja na rasuđivanje i aktivnosti isto kao i na znanje. Matematička kompetencija uključuje, u različitim stupnjevima, sposobnost i volju korištenja matematičkog načina mišljenja (logički prostorno razmišljanje) i izražavanja (formulama, modelima, konstrukcijama, grafikonima, dijagramima).“* (Preporuka Europskog parlamenta i savjeta od 18. prosinca 2006. o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje, 2010.)

U istom dokumentu ističe se da pojedinac treba biti sposoban matematički rasuđivati, razumjeti matematičke dokaze, razumjeti i procjenjivati različite faze argumentacije te komunicirati matematičkim jezikom. Upravo ove kompetencije postale su osnova za donošenje i razvoj kurikulumskih dokumenata za obrazovanje učenika u osnovnim i srednjim školama u Republici Hrvatskoj.

U Nacionalnom okvirnom kurikulumu (2011.) propisana su postignuća koja bi učenik trebao ostvariti po završetku pojedinih odgojno-obrazovnih ciklusa. U kurikulumu, za predmet Matematika, postignuća su razrađena u dvije dimenzije: matematički koncepti i matematički procesi. U prvom odgojno – obrazovnom ciklusu, koji traje od prvoga do četvrtoga razreda osnovne škole, matematički koncepti organizirani su u domene: *Brojevi*, *Oblik i prostor*, *Mjerenje* i *Podatci*. Svaka domena matematičkih koncepata popisuje sadržajno specifična temeljna znanja koja bi učenici trebali steći tijekom određenog odgojno – obrazovnog ciklusa.

Matematički procesi opisuju opće matematičke kompetencije koje se trebaju razviti kroz nastavu matematike. Potrebno je metodama aktivne nastave razvijati matematičke procese povezujući ih sa svim konceptima i integrirajući ih u rješavanje problema i otkrivanje novih matematičkih sadržaja. Kao jednu od nastavnih strategija, koja se pritom može koristiti, Pavleković (2009., str. 65. – 69.) navodi vođeno učenje otkrivanjem. To je strategija u kojoj učitelj vodi učenika kroz zadatak, ali mu ostavlja mogućnost samostalnog zaključivanja. Posebno je pogodna u početnoj nastavi matematike kad većina učenika nije u stanju samostalno istražiti i otkriti pravilnost u danoj situaciji, nego su im potrebna dodatna objašnjenja i upute učitelja. Kako bi uspješno primjenjivao ovu nastavnu strategiju učitelj treba vladati matematičkim sadržajima i poznavati intelektualne sposobnosti djeteta, te prepoznati motiviranost učenika i poticati ju.

Matematički procesi organizirani su u domene: *Prikazivanje i komunikacija*, *Povezivanje*, *Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje*, *Rješavanje problema i matematičko modeliranje* te *Primjena tehnologije*. U ovom radu promatrat ćemo matematički proces *Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje*. Očekivana učenička postignuća za ovaj matematički proces su sljedeća:

- postavljati matematici svojstvena pitanja (Postoji li...? Koliko ima...? Što je poznato? Što trebamo odrediti? Kako ćemo odrediti? Zbog čega? Ima li rješenje smisla? Postoji li više rješenja?) te stvarati i istraživati pretpostavke o matematičkim objektima, pravilnostima i odnosima
- obrazložiti odabir matematičkih postupaka i utvrditi smislenost dobivenog rezultata
- zaključivati nepotpunom indukcijom i neformalnom dedukcijom s malim brojem koraka

Glasnović Gracin (2007.) sposobnost matematičkog mišljenja i zaključivanja prepoznaje u postavljanju i odgovaranju na pitanja navedena u prvom ishodu promatranog procesa kao što su Postoji li...? Koliko ima...? Što je poznato? Što trebamo odrediti? Kako ćemo odrediti? Zbog čega? Učenici koji se bliže završetku obveznog obrazovanja trebaju biti u stanju (Glasnović Gracin, 2007.):

- odgovarati na postavljena pitanja,
- razlikovati različite vrste izjava (definicija, teorem, hipoteza, primjer,…),
- pratiti i ispitivati sljedove matematičkog argumenta,
- posjedovati osjećaj za heuristiku (Ima li rješenje smisla? Postoji li više rješenja?),
- kreirati i izražavati matematičke argumente i razlikovati ih od ostalih vrsta matematičkog zaključivanja i
- obrazložiti odabir matematičkih postupaka i utvrditi smislenost dobivenog rezultata.

U TIMSS-ovom istraživanju od učenika četvrtog razreda obveznog obrazovanja očekuje se rasuđivati u 20% zadataka postavljenih u ovom istraživanju (Mullis i sur., 2012.). Rasuđivanje omogućuje učenicima rješavanje nerutinskih problema, a odnosi se na sposobnost logičkog, sustavnoga razmišljanja te primjene znanja i vještina u novim, nepoznatim situacijama. Uključuje više kognitivne procese poput analize, generalizacije odnosno specijalizacije, sinteze, dokazivanja i rješavanja nerutinskih problema. Zadaci koji zahtijevaju višu primjenu kognitivnih procesa mogu utjecati na opće učeničke sposobnosti promišljanja. Oni od učenika traže da opažaju i nagađaju, logički zaključuju na temelju određenih pretpostavki i pravila te da potkrijepe svoje rješenje.

Kurnik (2009.b) kao osnovne znanstvene metode mišljenja i istraživanja navodi analizu i sintezu, analogiju, indukciju i dedukciju, generalizaciju i specijalizaciju, apstrakciju i konkretizaciju. Matematički proces *Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje* među navedenim oblicima mišljenja ističe indukciju i dedukciju.

Pojam indukcija potječe od latinske riječi *inductio* što znači uvođenje, navođenje, pobuđivanje. Tri su osnovna značenja pojma indukcije (Kurnik, 2009.b):

1. način zaključivanja u kojem se iz dva ili više pojedinačnih sudova izvede novi sud. To je misaoni proces kod kojeg rasuđujemo od pojedinačnog ka općem.
2. jedna od osnovnih znanstvenih metoda istraživanja koju se koristi pri proučavanju nekog skupa objekata. Promatraju se posebni objekti iz toga skupa i utvrđuju njihova zajednička svojstva. Nakon što se utvrde zajednička svojstva posebnih objekata, ona se pripisuju cijelom skupu.
3. način izlaganja u razgovoru i nastavnom procesu koje koriste učitelji, profesori kako bi omogućili učenicima da od manje općih tvrdnji dođu do općih tvrdnji.

Uočavanjem istih svojstava koja pokazuju neki elementi skupa koji se promatra, postoji mogućnost da se donese zaključak da svaki element toga skupa ima to svojstvo. Tako nastala opća tvrdnja naziva se hipoteza i nju je potrebno dokazati. Ukoliko se induktivnim zaključivanjem došlo do krivog zaključka, hipoteza nije točna te je potrebno pronaći kontraprimjer. Kontraprimjer je primjer koji pokazuje da zaključak, hipoteza do koje se došlo, nije istinit (Pavleković, 2008.).

Ovčar (1990.) indukciju u nastavi matematike opisuje kao logički, metodički i spoznajni postupak usmjeren na utvrđivanje materijalne lažnosti ili istinitosti neke matematičke spoznaje. Razlikujemo potpunu i nepotpunu indukciju. Ovisno o vrsti indukcije, biraju se metodički postupci koji će pomoći djeci u zaključivanju.

Potpuna indukcija u postupku zaključivanja u premisama obuhvaća sve pojedinačne slučajeve. U nastavi matematike primjenjuje se ako su poznati svi pojedinačni slučajevi neke pojave koja se promatra. Učenici potpunu indukciju primjenjuju već u 1. i 2. razredu osnovne škole, kad je broj pojedinačnih slučajeva u postupku zaključivanja malen, primjerice kod usvajanja pojmova parnih i neparnih brojevi u skupu brojeva do 10 ili tablice množenja i dijeljenja u skupu brojeva do 100 (Ovčar, 1990.). Potpuna indukcija pomaže učeniku da dođe do novih spoznaja i to je njena metodička vrijednost.

Nepotpuna indukcija podrazumijeva već opisani proces zaključivanja od pojedinačnog ka općem. Ova vrsta indukcije zastupljena je u početnoj nastavi matematike prilikom obrade novog nastavnog sadržaja, primjerice zakona komutacije za zbrajanje (Ovčar, 1990.). Korištenje nepotpune indukcije osposobljava učenike postavljati pretpostavke, propitkivati i provjeravati njihovu valjanost.

U sadržajnoj domeni *Brojevi* TIMSS-ovog kurikuluma navedena su postignuća vezana uz obrasce i odnose (Mullis i sur., 2012.). Od učenika četvrtog razreda očekuje se prepoznati i proširiti dobro definirane obrasce, opisati odnos među susjednim članovima niza i odnos između rednog broja člana u nizu i samog člana niza te napisati ili odabrati pravilo koje opisuje odnos među parovima prirodnih brojeva i odrediti parove brojeva koji zadovoljavaju to pravilo (Mullis i sur., 2012.). Drugo postignuće odnosi se na funkcionalnu ovisnost kako je primjereno dobi učenika. Za ostvarivanje prvog postignuća je potrebno induktivno zaključivanje.

Druga metoda mišljenja koja se ističe u matematičkom procesu logičkog mišljenja, argumentiranja i zaključivanja jest dedukcija. Kurnik (2009.b) dedukciju definira kao *„oblik zaključivanja pri kojemu se od jednog općeg suda i jednog posebnog ili pojedinačnog suda dobiva novi, manje općenit, poseban ili pojedinačan sud.“*

Deduktivno zaključivanje ima tri oblika:

1. zaključivanje od opće tvrdnje na manje općenitu ili pojedinačnu tvrdnju

   Primjer:

   Ako su a i b parni brojevi, onda je njihov umnožak paran broj (opća tvrdnja).

   Brojevi 12 i 14 su parni (pojedinačna tvrdnja).

   Iz ovih dvaju sudova izvodi se pojedinačna tvrdnja: Umnožak brojeva 12 i 14 je paran broj.

2. zaključivanje od pojedinačnog ka posebnom

   Primjer:

   Broj 2 je prost broj (pojedinačna tvrdnja).

   Broj 2 je prirodan broj (pojedinačna tvrdnja).

   Neki prirodni brojevi su prosti brojevi (posebna tvrdnja).

3. zaključivanje od opće tvrdnje ka općoj tvrdnji

   Primjer:

   Svi parni brojevi djeljivi su s 2 (opća tvrdnja).

   Nijedan neparni broj nije djeljiv s 2 (opća tvrdnja).

   Nijedan parni broj nije istovremeno i neparan broj (opća tvrdnja).

Matematika je logičko-deduktivna znanost u kojoj se tvrdnje iskazuju u obliku sudova, gdje je sud *„suvisla deklarativna rečenica koja se u pogledu istinitosti podvrgava načelu isključenog trećeg i načelu kontradikcije, tj. ona je ili istinita, ili neistinita"* (Kurnik, 2013.). Sudovi mogu biti jednostavni, a korištenjem logčkih veznika jednostavne sudove možemo povezati u složene sudove. Razlikuju se sljedeće logičke operacije: negacija, konjunkcija, disjunkcija, implikacija i ekvivalencija. Za ovaj rad značajne su negacija, konjunkcija, disjunkcija i implikacija. U svakodnevnom govoru negaciji odgovaraju riječi *ne*, *nije*, konjunkciji veznik *i*, dok disjunkciji odgovara veznik *ili*. Implikacija sudova A i B može se čitati na sljedeće načine: *ako je A, onda je B*; *A je dovoljan uvjet za B*; *B je nužan uvjet za A*. Konjunkcija „*A i B*" je istinita onda i samo onda ako su istinite obje izjave A, B. Disjunkcija „*A ili B*" je neistinita onda i samo onda kad su neistinite obje izjave A, B. Implikacija „*Ako A onda B*" je neistinita onda i samo onda kad je izjava A istinita, a izjava B neistinita. Negacija je istinita onda i samo onda kada je izjava A neistinita. Važno je istaknuti kako je negacija konjunkcije disjunkcija negacija početnih izjava, dok je negacija disjunkcije konjunkcija negacija početnih izjava.

Matematičkim tvrdnjama iskazanim u obliku sudova istinitost se utvrđuje dokazom. Prema Kurniku (2009.a) dokaz teorema *„je konačan niz tvrdnji teorije u kojemu je svaka tvrdnja ili aksiom, ili je dobivena iz prethodno dokazanih tvrdnji toga niza po nekom pravilu logičkog zaključivanja. Posljednja tvrdnja u tome nizu sama je tvrdnja teorema.“* Prema postupku dokazivanja, razlikujemo dvije vrste dokaza, a to su: direktni i indirektni dokazi. Direktni dokaz provodi se počevši od pretpostavke matematičkog suda nizom ispravnih logičkih zaključivanja dok se ne dođe do tvrdnje matematičkog suda (Kurnik, 2001.). Indirektni dokaz provodi se polazeći od pretpostavke da za svaku tvrdnju matematičkog suda postoji suprotna tvrdnja, odnosno negacija tvrdnje matematičkog suda. Od te dvije tvrdnje, samo je jedna istinita. Indirektni dokaz temelji se na promatranju suprotne tvrdnje. Tijekom promatranja nastoji se dokazati da je suprotna tvrdnja neistinita (Kurnik, 2001.). Jedan oblik indirektnog dokazivanja je svođenje na kontradikciju (Kurnik, 2001.). Takav dokaz provodi se počevši od pretpostavke kako je uz dane uvjete negacija tvrdnje matematičkog suda istinita te se nizom ispravnih logičkih zaključivanja dolazi do proturječnosti odnosno pokaže se kako je početna pretpostavka neistinita (Kurnik, 2001.).

Primjer zadataka koji zahtijevaju odgovarajuće logičko rasuđivanje su takozvani logički zadaci (Kurnik, 2010.). U logičkim zadacima težište je na procesu logičkog mišljenja, a ne na pojedinim matematičkim konceptima. Tekst zadatka je oblikovan kao priča u kontekstu svakodnevnih situacija (rasporedi, natjecanja, nezgode, ispiti, svjedočenja,…). Zadaci sadrže iskaze koji se odnose na neke objekte ili obilježja te se propitkuje ili zadaje istinitost tvrdnji. U školskim zbirkama zadataka i u udžbenicima se ovakvi zadaci rijetko pronalaze iako su vrlo prikladni za razvijanje logičkog mišljenja. Oni su zastupljeni na matematičkim natjecanjima. Agencija za odgoj i obrazovanje navodi sadržaje koje učenici mogu očekivati na određenim razinama natjecanja (Tablica 1.) te se na razini županijskog natjecanja za učenike 4. razreda javljaju logički zadaci.

Tablica 1. Matematički sadržaji na određenim razinama natjecanja

Školsko/gradsko	Županijsko	Regionalno
- gradivo prethodnih razreda - brojevi do milijun - kutovi - pisano množenje	- prije navedeno gradivo 4. razreda - trokut, pravokutnik i kvadrat - logički zadaci	- prije navedeno gradivo 4. razreda - pisano dijeljenje - logički zadaci - kombinatorni zadaci

Ovakav režim natjecanja za učenike IV. razreda osnovne škole vrijedio je do 2010. Od 2011. za učenike IV. razreda organizira se samo školsko/gradsko i županijsko natjecanje.

Za rješavanje logičkih zadataka nije potrebno sadržajno specifično matematičko predznanje. Kurnik (2010.) razlikuje se nekoliko metoda rješavanja logičkih zadataka:

- Metoda „zdravog razuma“
- Metoda lažne ili pomoćne pretpostavke
- Metoda isključivanja
- Metoda tablica
- Metoda grafova
- Metoda računa izjava

Posebno je zanimljiva metoda lažne pretpostavke jer imitira indirektno dokazivanje. Rješavanje započinje pretpostavkom istinitosti neke tvrdnje. Nakon uvođenja pretpostavke utvrđuje se zadovoljava li ona uvjete zadatka. Ukoliko tvrdnja zadovoljava uvjete zadatka, ona je istinita, u suprotnom tvrdnja je lažna te je potrebno izvesti neki zaključak ili ponoviti postupak.

3. Metodologija

3.1. Akcijsko istraživanje

Cohen, Manion i Morrison (2007.) nalaze akcijska istraživanja korisnima za promjene i poboljšanja nastavne prakse na lokalnoj razini. Učitelji ih mogu provoditi samostalno ili u suradnji s drugim učiteljima ili istraživačima i stručnim suradnicima.

Akcijska istraživanja mogu se implementirati za propitkivanje novih metoda poučavanja, strategija učenja te postupaka evaluacije. Ova vrsta istraživanja kombinacija je nastavne aktivnosti i istraživanja te omogućuje učiteljima da poboljšaju svoju praksu i da se trajno i profesionalno usavršavaju. Akcijska istraživanja poboljšavaju kompetencije sudionika, suradnička su, pridonose praktičnom rješavanju problema, uključuju evaluaciju i refleksiju.

Neka od brojnih obilježja akcijskih istraživanja su:

- prikupljanje bilješki koje opisuju ono što se događa u skupini koja se promatra,
- prikupljanje reakcija i dojmova prilikom promatranja skupine,
- vođenje osobnog dnevnika u kojemu se bilježi napredak,
- započinju malim grupama suradnika, no broj sudionika se može povećati,…

Po završetku praktičnih aktivnosti bitno je provesti evaluaciju. Njome se utvrđuje kvaliteta provedenih aktivnosti, a posebno jesu li aktivnosti rezultirale očekivanim promjenama u razvijanju sposobnosti učenika. Bognar (1999.) navodi da evaluacija podrazumijeva informacije o tome koliko je proces bio uspješan, jesu li postavljeni zadaci ostvareni, jesu li se pojavili novi problemi i koji, te smjernice kako raditi ubuduće. S obzirom na to da su učitelji aktivni sudionici nastavnih aktivnosti ponekad ne mogu dobiti kompletnu sliku razvoja i napredovanja učenika stoga se mogu poslužiti video ili audio snimkama provedene aktivnosti kako bi naknadno promotrili i analizirali određenu aktivnost. Drugi dostupan oblik evaluacije jest upitnik za učenika kojim on vrjednuje svoje ponašanje, uspjeh i primjerenost aktivnosti.

Bjelanović Dijanić (2011.) je provela akcijsko istraživanje s učenicima 2. razreda opće gimnazije kojim je ispitivala kako pomoći učenicima da samostalno usvoje matematičke pojmove, koncepte i ideje strategijom otkrivanja pomoću dinamičkog programa Geogebra. Tijekom istraživanja poticala je samostalnost pri učenju i rješavanju problema, aktivnost učenika u nastavi te suradnju između učenika. Za evaluaciju provedenih nastavnih aktivnosti autorica je koristila grupni polustrukturirani intervju u kojem su učenici iskazivali prednosti i nedostatke tako organiziranog poučavanja.

3.2. Cilj i zadaci istraživanja

Cilj ovog istraživanja je ustanoviti koliko su odabrani zadaci i nastavne aktivnosti primjerene razvojnoj dobi učenika i doprinose li razvijanju procesa *Logičkog mišljenja, argumentiranja i zaključivanja*. Zadaci ovog istraživanja su:

- Ispitati jesu li učenici četvrtog razreda osnovne škole sposobni rješavati logičke zadatke i zadatke koji zahtijevaju induktivno zaključivanje.
- Ispitati u kojoj mjeri su učenici samostalni pri rješavanju odabranih zadataka, utvrditi kakve teškoće imaju pri rješavanju odabranih zadataka te kakva pomoć im je pritom potrebna.
- Istražiti strategije kojima učenici dolaze do rješenja.
- Ispitati mogu li učenici vođenim učenjem otkrivanjem spoznati pravilnosti u zadacima geometrijskog karaktera primjenjujući vlastita znanja i vještine.
- Ispitati kakva je motivacija i interes za rješavanje ovakvih zadataka, te jesu li se učenici prethodno susretali s takvim zadacima i u kojim prilikama.

3.3. Uzorak

Istraživanje je provedeno s polaznicima Male matematičke škole. To je izvanškolska aktivnost za učenike četvrtih razreda osnovnih škola s posebnim interesom za matematiku. Radionice Male matematičke škole osmišljavaju, organiziraju i provode studenti završnih godina učiteljskih studija pod vodstvom nastavnika matematike Fakulteta za odgojne i obrazovne znanosti u Osijeku. Susreti Male matematičke škole održavaju se redovito svaki drugi ponedjeljak tijekom školske godine. Polaznici na radionicama sudjeluju u različitim projektima s temama koje često izlaze izvan okvira redovitog nastavnog programa te rješavaju matematičke probleme i situacije iz svakodnevnog života primjenjujući svoja matematička znanja.

Tijekom susreta provedene su tri vrste aktivnosti: rješavanje logičkih zadataka, rješavanje zadataka induktivnim zaključivanjem i aktivnost istraživanja pravilnosti u zadacima geometrijskog karaktera. U tablici 2. je naveden broj učenika (po spolu) koji su sudjelovali u pojedinoj fazi susreta:

Tablica 2. Broj učenika po spolu u pojedinoj fazi susreta

Aktivnost	Broj učenika/ca	
	M	Ž
Rješavanje logičkih zadataka	7	6
Rješavanje zadataka induktivnim zaključivanjem	7	6
Aktivnost istraživanja pravilnosti u zadacima geometrijskog karaktera	5	3

3.4. Plan i instrumenti istraživanja

Polaznici Male matematičke škole su za potrebe ovog istraživanja na trima uzastopnim radionicama rješavali zadatke ili sudjelovali u aktivnostima individualno, u paru ili skupinama po troje učenika. Zadaci su diskutirani uz vođenje nastavnika te su učenici iznosili svoje odgovore, argumente i postupke otkrivanja točnog odgovora.

Odabrani zadaci preuzeti su iz knjiga namijenjenih učenicima i učiteljima početne nastave matematike, matematičkih natjecanja na različitim razinama, međunarodnog natjecanja „Klokan bez granica" i međunarodne studije TIMMS.

Učenici su na dva susreta dobili listiće s logičkim zadacima odnosno listić sa zadacima koji zahtijevaju induktivno zaključivanje. Učenici nisu bili vremenski ograničeni u rješavanju zadataka s listića. Listić s logičkim zadacima su rješavali u skupini kako bi se potaknula suradnička rasprava i argumentiranje. Zadaci na listićima su poredani po složenosti. Za potrebe radionice pripremljeni su i dodatni zadaci za uspješnije i brže učenike.

Dvije aktivnosti popraćene su evaluacijom za koju su podaci prikupljeni upitnikom (Prilog 6.). Cohen, Manion i Morrison (2007.) navode da je upitnik koristan instrument za prikupljanje podataka jer osigurava numeričke podatke koje je lako analizirati. Upitnik je bio polustrukturiran s dihotomnim i otvorenim pitanjima. Dihotomnim pitanjem dobivena je informacija o prethodnim iskustvima učenika, dok su otvorena pitanja dala saznanja o učeničkim doživljajima odabranih zadataka.

Treća aktivnost je bila opservacija radionice provedene strategijom vođenog otkrivanja s polaznicima Male matematičke škole. Morrison (1993., prema Cohen, Manion i Morrison, 2007.) navodi da istraživač opservacijom može prikupiti podatke o: okolini i organizaciji, karakteristikama osobe koja se opaža, interakcijama koje se odvijaju unutar opažane skupine, te programskom okružju (kurikulumu, resursima, organizaciji,…). Lincoln i Guba (1985., prema Cohen, Manion i Morrison, 2007.) predlažu vrste bilješki koje se mogu voditi tijekom opservacije: tekuće bilješke koje se vode na licu mjesta, „kronodnevnici" u kojima su zabilježene zasebne epizode ponašanja i vrijeme u koje su se one dogodile, završni upitnici sudionika koje je konstruirao opažač i koji služe samo njemu. U ovom akcijskom istraživanju korištene su tekuće bilješke koje istraživač vodi na licu mjesta i završni upitnici sudionika koje je osmislio istraživač i koji služe samo njemu.

4. REZULTATI I RASPRAVA

4.1. Rješavanje logičkih zadataka

Na prvom susretu provedenom za potrebe istraživanja polaznici Male matematičke škole dobili su listiće s logičkim zadacima (Prilog 1. i 2.). Za svaki pojedini zadatak opisat će se očekivano rješenje, postupak kojim su učenici riješili zadatak, teškoće s kojima su se susreli i u kojem obliku im je pružena pomoć. Prvi listić učenici su rješavali individualno te je on bio popraćen intenzivnom zajedničkom raspravom.

Zadatak 1. (Marinković, 2002.)

Koja je znamenka umjesto slova A?

AAA+AA+A+A+A=1000

Očekivano rješenje:

U ovom računu zbraja se jedan troznamenkasti, jedan dvoznamenkasti i tri jednoznamenkasta broja. Znamenke koje su na raspolaganju su: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Treba uočiti da je znamenka jedinice zbroja jednaka 0, dok pet pribrojnika ima jednaku znamenku jedinica. Tražena znamenka stoga treba biti paran broj, pa može biti 2, 4, 6 ili 8. Zbog vrijednosti zbroja može se procjenom utvrditi kako znamenke 2, 4 i 6 nisu rješenja, te provjeriti računom kako je tražena znamenka 8.

Prvi zadatak (Prilog 1.) učenici su riješili uvrštavanjem znamenki od 1 do 9 dok ne dobiju zbroj koji odgovara rješenju. Na postavljeno pitanje odgovaraju kako znamenka 2 nije rješenje jer je premala, to jest ako se troznamenkastom broju 222 doda dvoznamenkasti broj 22 i tri jednoznamenkasta broja 2 ne može se dobiti zbroj 1000. Uz odgovarajuće vođenje učenici otkrivaju kako znamenka mora biti paran broj jer je zadnja znamenka zbroja nula. Jedan učenik došao je do rješenja isprobavajući koje brojeve može pomnožiti da dobije umnožak 1000. Njegov odgovor bio je da je slovo A znamenka 8 jer je $125 \cdot 8 = 1000$. Kada ga je voditeljica zamolila da obrazloži svoj odgovor, učenik to nije znao obrazložiti, iako je pogodio traženu znamenku.

Zadatak 2.[1]

Tri brata, Siniša, Tomica i Perica, učenici su osnovne škole i polaze različite razrede. Siniša nije stariji od Perice, a Tomica nije stariji od Siniše. Tko je najstariji, a tko najmlađi od njih?

Očekivano rješenje:

Zapišemo sljedeće tvrdnje:

a. Siniša nije stariji od Perice.
b. Tomica nije stariji od Siniše.

Iz ove dvije tvrdnje može se zaključiti da je Tomica najmlađi, jer nije stariji od Siniše, a Siniša nije stariji od Perice, onda Tomica isto nije stariji od Perice. Kako je Tomica najmlađi, a Siniša nije stariji od Perice, onda je Perica najstariji.

Drugi zadatak točno je riješilo deset od trinaest učenika. Učenici su zadatak okarakterizirali kao lagan. Njihovo objašnjenje je u skladu s predviđenom argumentacijom za rješavanje zadatka.

Zadatak 3. (Kurnik, 2010.)

Tri dječaka došla su na igralište s loptama A, B i C različitih boja. Jedna lopta je smeđa, druga žuta, a treća plava. Koje su boje lopte ako je samo jedna od tri izjave istinita:

a) A je plava lopta,
b) B nije plava lopta,
c) C nije smeđa lopta?

Očekivano rješenje:

Pretpostavimo da je a) tvrdnja istinita: A je plava lopta, onda su b) i c) tvrdnje neistinite. Odmah u b) tvrdnji može se uočiti da bi i lopta B bila plava što nije točno jer je to suprotno činjenici da su sve lopte različitih boja. Stoga se a) tvrdnja odbacuje kao istinita. Ako se pretpostavi da je b) tvrdnja istinita: B nije plava lopta, onda su tvrdnje a) i c) neistinite. Prema tome, B nije plava lopta, A nije plava lopta i C je smeđa. Ako A i B nisu plave, onda su žute boje. Ni ova pretpostavka nije točna jer ne mogu biti

[1]Treći regionalni susret mladih matematičara, Rijeka, 4. lipnja 1994. godine, 4. razred

dvije lopte iste boje. Ako se pretpostavi da je posljednja tvrdnja istinita, onda C nije smeđe boje. Tvrdnja pod b) nije istinita pa je lopta B plave boje. Preostaje nam tvrdnja a) koja je također neistinita pa iz nje proizlazi da lopta A nije plave boje. Ako lopta A nije plave boje, a C nije smeđe, onda je lopta A smeđe boje. Lopta C je žute. Rješenje: A je smeđe, B plave, a C žute boje.

U trećem zadatku učenici su naišli na poteškoće i nisu znali kako trebaju započeti rješavanje. Uputa voditeljice je bila da oni sami odaberu koja izjava je istinita te provjere što bi onda bilo rješenje. Prilikom pronalaska rješenja neki učenici su se odlučiti riješiti zadatak metodom tablica. Zapisali su to na sljedeći način:

Tablica 3. Metoda rješavanja 3. zadatka jednog učenika

	P	Ž	S
A			
B			
C			

Oni koji su pokušali na ovaj način nisu bili uspješni u rješavanju zadatka.

Učenici koji su zadatak rješavali metodom lažne pretpostavke dobili su točno rješenje. Ključni zaključci do kojih su učenici došli su:

- za a) tvrdnju: A i B su plave lopte, to ne može biti istina
- za b) tvrdnju: dvije lopte nisu plave (A i B), nema plave lopte
- za c) tvrdnju: B lopta je plave boje zbog b) tvrdnje koja nije istinita. C lopta nije smeđa, onda je plava ili žuta. Ako je B plava, onda je C žuta. A lopta A je smeđe boje.

Zadatak 4. (Kurnik, 2010.)

Četiri učenice: Branka, Ljiljana, Nela i Vlasta, igrale su međusobno mali teniski turnir. Na kraju je stigla njihova prijateljica Snježana i zanimala se za redoslijed. U nadvikivanju i smijehu prijateljica je „zapamtila“ ova tri odgovora:

a. Vlasta je bila druga, a Ljiljana je osvojila treće mjesto.
b. Ljiljana je bila četvrta, a Branka je bila druga.
c. Nela je bila druga, a Vlasta je pobijedila.

U svakoj izjavi jedan je dio istinit, a drugi neistinit. Koji je poredak mladih tenisačica?

Očekivano rješenje:

Ako se pretpostavi da je prvi dio a. tvrdnje istinit, onda je Vlasta bila druga, a Ljiljana nije bila treća. Ako je istina da je Vlasta bila druga, onda drugi dio b. tvrdnje nije istinit. Branka nije bila druga, ali je prema tome Ljiljana bila četvrta. U c. tvrdnji se može uočiti da drugi dio tvrdnje (Vlasta je pobijedila.) nije istinit jer se pretpostavlja da je ona druga, te se pojavljuje informacija koja je proturječna (Nela je druga.) i stoga se odbacuje početna pretpostavka. Ako se pretpostavi da je u a. tvrdnji istina da je Ljiljana osvojila treće mjesto, onda Vlasta nije druga. Ako je Ljiljana treća, onda je u b. tvrdnji istina da je Branka druga. Ako je Branka druga, onda je u c. tvrdnji istina da je Vlasta pobijedila. Na posljetku se može zaključiti da je Nela četvrta.

Poredak mladih tenisačica je sljedeći:

1.. Vlasta

2.. Branka

3.. Ljiljana

4.. Nela

Učenici su prepoznali kako, slično prethodnom zadatku moraju pretpostaviti koja tvrdnja je istinita, a koja lažna kako bi došli do rješenja. Nekim učenicima je bilo potrebno pojasniti što su dvije tvrdnje u jednoj izjavi i što znači da je jedna lažna, a druga istinita. Svi učenici koji su riješili zadatak imali su točan poredak mladih tenisačica.

Drugi listić (Prilog 2.) predviđen je za samostalno rješavanje u paru ili skupini na temelju individualnih i zajedničkih aktivnosti provedenih tijekom rješavanja prvog listića. Rad u paru odnosno skupini trebao je potaknuti zajedničko rješavanje, razmjenu ideja, raspravu i argumentaciju.

Zadatak 1. (Polonijo, 2002.)

Na vaterpolo turniru sudjelovale su četiri momčadi: Dupin, Trp, Maslina i Ježinac. Dakako, prije početka turnira navijači su pokušali pogoditi konačni ishod turnira. Navijači su dali sljedeće prognoze:

a) Ako je Ježinac prvi, onda je Maslina druga.
b) Ako je Ježinac drugi, onda je Dupin treći.
c) Ako je Dupin zadnji, onda je Trp drugi.

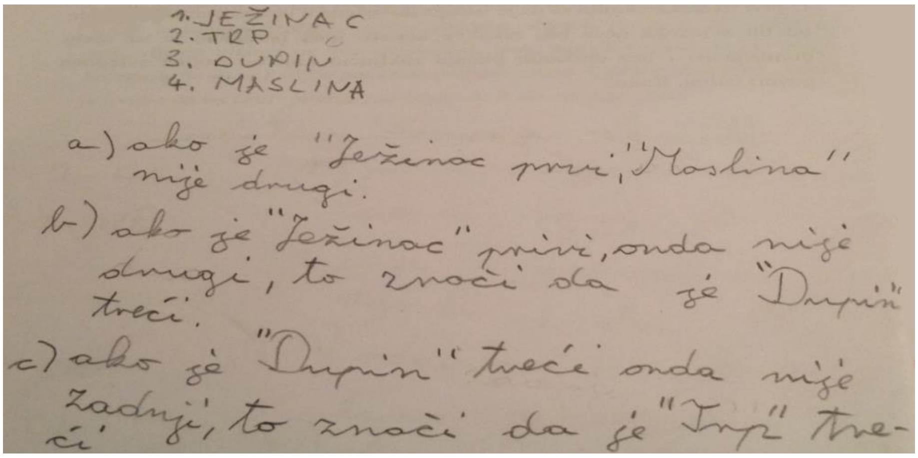
Prognoze su se ispunile polovično – svaki od trojice imao je jedan pogodak i jedan promašaj u svojoj prognozi. Koji je bio konačni redoslijed na kraju turnira?

Očekivano rješenje:

Ako se pretpostavi da je Ježinac prvi, onda je tvrdnja da je Maslina druga neistinita. Ako je Ježinac prvi, onda je u b) tvrdnji istina da je Dupin treći. Ako je Dupin treći, u c) tvrdnji onda nije istina da je on zadnji, ali je istina da je Trp drugi. Preostalo četvrto slobodno mjesto je osvojila Maslina. Poredak momčadi na kraju turnira je sljedeći:

1. Ježinac
2. Trp
3. Dupin
4. Maslina

Prvi zadatak (Prilog 2.) učenici su rješavali metodom lažne pretpostavke. Sve skupine su zadatak riješile točno. Učenici objašnjavaju da su zadatak riješili isprobavajući po redu istinitost tvrdnje dok im nije *„ispalo točno“*. Ovaj zadatak učenici su riješili bez poteškoća, zaključivali su pravilno no naišli su na poteškoće prilikom verbalizacije rješenja. Svi parovi započeli su objašnjenje, ali ga nisu dovršili. Samo jedan par učenika je dao objašnjenje slično objašnjenju rješenja zadatka koje glasi:



Slika 1. Učeničko rješenje 1. zadatka (Prilog 2.).

„Ako je Ježinac prvi, Maslina nije druga. Ako je Ježinac prvi, onda nije drugi, to znači da je Dupin treći. Ako je Dupin treći, onda nije zadnji, to znači da je Trp drugi. Pa je konačni poredak na kraju turnira sljedeći:

i. *Ježinac*
ii. *Trp*
iii. *Dupin*
iv. *Maslina“*

Zadatak 2. (Polonijo, 1995.)

Imao otac četiri sina: Marka, Vinka, Luku i Nikolu. Svaki od njih krenuo je u svijet da izuči neki zanat. Jedan je učio za kovača, drugi za tesara, treći za pekara, a četvrti za mesara. Kad su završili svoje naukovanje, vratiše se sinovi ocu i on ih zapita što je tko naučio, a oni mu ovako odgovoriše:

Marko: „Niti sam kovač, niti sam pekar."

Vinko: „Nisam kovač."

Luka: „Ja sam kovač."

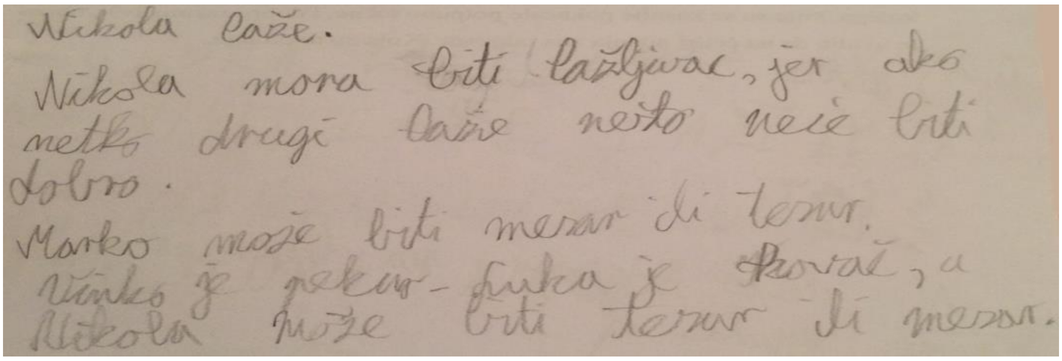
Nikola: „Ja sam pekar."

Ipak, ako vam otkrijemo da za razliku od ostalih jedan od sinova nije rekao istinu, možete li odrediti koji je to bio?

Očekivano rješenje:

U zadatku je dana informacija da jedan od sinova nije rekao istinu. Ako se pretpostavi da je Markova tvrdnja lažna onda je on ili kovač ili pekar. Ako su ostale tri tvrdnje istinite onda Vinko nije kovač, Luka je kovač i Nikola je pekar. Uočavamo proturječnost jer je Marko kovač ili pekar pa to ne mogu biti Luka odnosno Nikola. Dakle, Markova tvrdnja je istinita Netko od preostale trojice ne govori istinu. Ako Vinko ne govori istinu, onda je on kovač. Luka je također kovač, a Nikola pekar. Uočava se proturječnost jer ne mogu dvojica sinova imati isto zanimanje. Ako se pretpostavi da Luka laže, dobivamo sličan ishod kao i u prethodnom slučaju. Ako se pretpostavi da Nikola laže, onda preostala tri sina govore istinu. Marko nije niti kovač niti pekar, Vinko nije kovač, Luka je kovač, a Nikola nije pekar. Onda Vinko mora biti pekar.

U drugom zadatku (Prilog 2.) učenici su također pretpostavljali da je jedna tvrdnja lažna, a preostale tri istinite. Također u svojim objašnjenjima navode da su išli redom isprobavati tvrdnje, dok nisu došli do rješenja zadatka. Traže pomoć voditeljice kako bi ih usmjerila na koji način da zaključuju i dođu do rješenja. U ovome zadatku učenici ne nude cjelokupno rješenje zadatka, niti postupak kako su to činili. Nude samo „skraćenu verziju" razmišljanja, odnosno objašnjenje za zadnji korak u njihovom razmišljanju, odnosno zadnju tvrdnju.


Nikola laže.
Nikola mora biti lažljivac, jer ako
netko drugi laže nešto neće biti
dobro.
Marko može biti mesar ili tesar.
Vinko je pekar- Luka je kovač, a
Nikola može biti tesar ili mesar.

Slika 2. Učeničko rješenje 2. zadatka (Prilog 2.).

„Nikola laže. Nikola mora biti lažljivac, jer ako netko drugi laže nešto neće biti dobro. Marko može biti mesar ili tesar. Vinko je pekar. Luka je kovač, a Nikola može biti tesar ili mesar."

U ovom zadatku bilo je bitno da učenici uoče da ne mogu točno odrediti kome koje zanimanje pripada, a to su dvije učenice i uočile i zapisale sljedeću izjavu:*„ ...Marko može biti tesar ili mesar... a Nikola može biti tesar ili mesar."*

Zadatak 3. (Polonijo, 1995.)

Student Stanko Logić nedavno je polagao pismeni ispit koji se sastojao od pet tvrdnji za koje je trebalo odgovoriti jesu li istinite ili lažne. Dakle, odgovor na svako pitanje bio je ili DA ili NE. Stanko se za ispit slabo pripremio, no zato je bio dobro obaviješten o strukturi testa. Starije kolege su mu rekle:

1) ako je odgovor na prvo pitanje DA, tada je odgovor na drugo NE,
2) odgovori na prvo i posljednje pitanje su isti,
3) odgovori na drugo i četvrto pitanje su suprotni,
4) odgovor na barem jedno od posljednja dva pitanja je DA,

5) odgovora DA ima više nego odgovora NE.

Kada je Stanko pročitao ispitne zadatke, shvatio je da ni na jedno od postavljenih pitanja ne zna odgovoriti. Ipak, uzevši u obzir upute svojih kolega, koje su se kasnije pokazale potpuno točne, i dobro razmislivši, ubrzo je uvidio da na četiri pitanja zna odgovor. Koja su to pitanja?

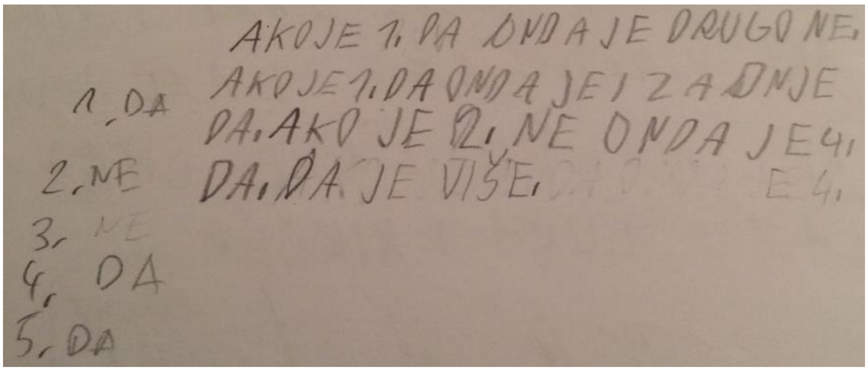
Očekivano rješenje:

Pretpostavimo da je odgovor na prvo pitanje NE. Prema drugoj tvrdnji odgovor na posljednje pitanje je NE. Prema četvrtoj tvrdnji odgovor na četvrto pitanje je DA. Prema trećoj tvrdnji odgovor na drugo pitanje je NE što je u suprotnosti s petom tvrdnjom jer odgovora NE ima više.

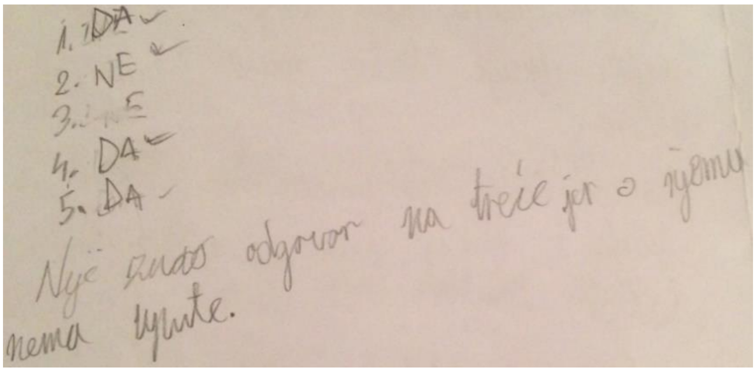
Ako se pretpostavi da je odgovor na prvo pitanje DA, tada je odgovor na drugo pitanje NE. Prema drugoj tvrdnji odgovor na posljednje pitanje je DA. Prema trećoj tvrdnji odgovor na drugo i četvrto pitanje su suprotni pa je onda odgovor na četvrto pitanje DA. Iz ovoga proizlazi da je četvrta tvrdnja istinita. Prebroje li se odgovori na pitanja, može se uočiti da je više DA odgovora nego NE, što zadovoljava uvjet pete tvrdnje. O trećem pitanju ne postoje informacije.

Treći zadatak (Prilog 2.) je učenicima bio najzanimljiviji, možda i najlakši za rješavanje jer su samo morali slijediti upute Stankovih starijih kolega. Ovaj zadatak učenici su riješili bez poteškoća i samostalno. Jedna trojka učenika zapisala je to na sljedeći način:

„Ako je 1. DA onda je drugo NE. Ako je 1. DA onda je i zadnje DA. Ako je 2. NE onda je 4. DA. DA je više.“



Slika 3. Učeničko rješenje 3. zadatka (Prilog 2.).



Slika 4. Učeničko rješenje 3. zadatka (Prilog 2.).

Svi su primijetili da Stanko *„nije znao odgovor na treće pitanje jer o njemu nema upute.“*

Zadatak 4. (Polonijo, 1995.)

Tijekom istrage, provedene nakon pljačke poštanskog ureda, svoje izjave su dala i trojica svjedoka koja su se zatekla u pošti u vrijeme prepada. To su bili Antun Slabovid, Branko Okić i Damir Previd. Međutim, njihove su izjave proturječile jedna drugoj, a na suočenju je svaki od njih optuživao nekog od preostalih za neistinu.

a) Antun: Branko laže!
b) Branko: Damir laže!
c) Damir: I Antun i Branko lažu!

U prvi trenutak učinilo se da je istraga dovedena u bezizlazan položaj i da od tih svjedoka neće biti nikakve koristi. Ipak istražitelj je uz malu domišljatost i bez dodatnih pitanja zaključio koji od trojice svjedoka govori istinu. Kako?

Očekivano rješenje:

Svaka od ove tri izjave je ili istinita ili lažna. Ako se pretpostavi da Antun govori istinu onda Branko laže. Ako Branko laže onda Damir govori istinu. Ako Damir govori istinu onda i Antun i Branko lažu, te se uočava proturječnost početnoj pretpostavki da Antun govori istinu. Ako se pretpostavi da Antun laže onda Branko govori istinu. Ako Branko govori istinu onda Damir laže. Ako Damir laže onda Antun ili Branko govore istinu, što je u skladu s pretpostavkom da Branko govori istinu. Od trojice svjedoka jedino Branko govori istinu pa je njegova priča najvjerodostojnija.

Četvrti zadatak (Prilog 2.) je učenicima bio najteži, nisu bili u stanju samostalno ga riješiti te je riješen zajednički strategijom vođenog otkrivanja. Učenicima je veliki problem bio način na koji su tvrdnje napisane. Zbunilo ih je što su morali razmišljati je li istinita ili lažna tvrdnja da netko laže, a posebno tumačenje posljednje tvrdnje. Uočimo tu se radi o složenom sudu konjunkcije, čija negacija odgovara situaciji kad Damir laže i glasi „Antun govori istinu ili Branko govori istinu“. Vođenim otkrivanjem učenici su ispravno protumačili istinitost i međuodnos pojedinih izjava te rješenje zadatka formulirali u sljedećem obliku: ako se pretpostavi da Antun govorio istinu, onda Branko laže. Ako Branko laže, onda Damir govori istinu. Ako Damir govori istinu, onda i Antun i Branko lažu što nije u skladu s tim da Antun govori istinu. Ako se pak pretpostavi da Damir govori istinu onda Antun laže pa Branko govori istinu. Ali to proturječi Damirovoj istinitoj izjavi da Branko isto laže. Dakle, jedini koji može govoriti istinu je Branko.

Tijekom susreta, neki učenici su bili brži s rješavanjem zadataka, stoga su imali mogućnost samostalno ili ako žele u paru rješavati dodatne zadatke. Sljedeća dva zadatka nisu rješavali svi učenici.

Zadatak 1. (Polonijo, 1995.)

Filip, Marko i Ilija igrali su se loptom ispred kuće Slavka Žestića kada je udarac jednog od njih uputio loptu u smjeru Žestićeva prozora. Pomoći nije bilo. Okno se razletjelo u tisuću komadića i u istom trenutku Žestić je istrčao na ulicu tražeći od djece da odmah priznaju koji je od njih razbio prozor. Dječaci su izrekli sljedeće tvrdnje:

a) Filip: Niti sam ja, niti je Marko razbio prozor.
b) Marko: Niti sam ja, niti je Ilija razbio prozor.
c) Ilija: Nisam razbio prozor i ne znam tko je to učinio.

Ipak, dječaci nisu u svojim izjavama bili posve iskreni. Svaki od njih kazao je samo jednu istinitu tvrdnju, dok je ona druga bila lažna. Navedeni podaci posve su dovoljni da se nađe „razbijač“ Žestićeva prozora.

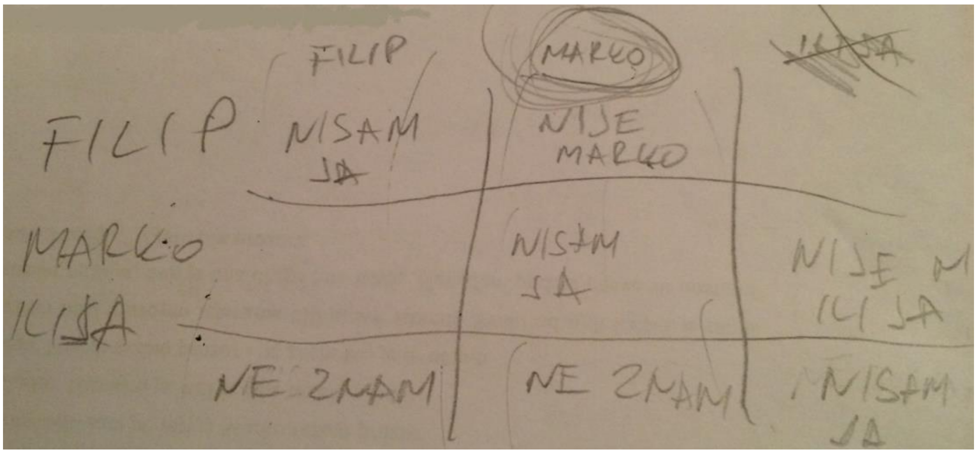
Očekivano rješenje:

U ovom zadatku jedna tvrdnja je istinita, a jedna neistinita kod svakog dječaka. Promotri li se Ilijina izjava i pretpostavi li se da je prvi dio lažan, onda bi to značilo da je on krivac te da je njegova druga izjava istinita i da ne zna tko je razbio prozor no to nije moguće. Ako se pretpostavi da je prvi dio Ilijine izjave točan, da on nije razbio prozor, onda je lagao o tome da ne zna tko je to učinio. Ako se promotri Markova izjava uočava se da je drugi dio izjave istinit jer Ilija nije razbio prozor, no onda je lažan prvi dio izjave koji govori o Markovoj nedužnosti. Dakle, Marko je krivac. Također je i jedna Filipova izjava lažna (Marko nije razbio prozor), a istinito je da on nije to učinio.

Dva učenika su rješavala ovaj zadatak (Prilog 5.). Jedan učenik je pokušao metodom tablice (Tablica 4.) riješiti ovaj zadatak, no to nije mogao uspješno učiniti jer iz tablice ne može iščitati tko je krivac.

Tablica 4. Učeničko rješavanje zadatka metodom tablica.

	Filip	*Marko*	*Ilija*
Filip	*nisam ja*	*nije Marko*	
Marko		*nisam ja*	*nije ni Ilija*
Ilija	*ne znam*	*ne znam*	*nisam ja*



Slika 5. Učeničko rješavanje zadatka metodom tablica (Prilog 5.).

Tek prepoznavanjem lažnih i istinitih tvrdnji i metodom eliminacije mogućnosti učenici točno rješavaju zadatak. Drugi učenik je tijek razmišljanja zapisao na sljedeći način:

„Marko je razbio prozor zato što Filip ne može razbiti jer bi onda ispalo da je i Ilija razbio. Filip govori laž u drugom dijelu rečenice što znači da je Marko taj.“

Zadatak 2. (Polonijo, 1983.)

Golić, Bekić, Penalić, Nogalić i Statić rezervni su igrači u nogometnoj momčadi i često poneki od njih zaigra i za prvu momčad. Iz dosadašnjih utakmica poznato je:

1. ako igra Golić, tada zaigra i Bekić
2. ako igra Statić, tada uvijek ulaze i Golić i Penalić
3. Penalić i Nogalić, ili obojica igraju ili ne igraju
4. ili Bekić igra ili Nogalić igra, ali ne i oba
5. igra ili Penalić ili Statić, ili obojica igraju

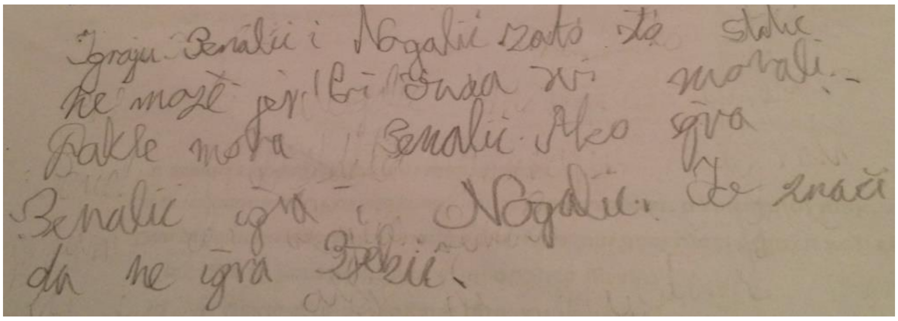
Dan prije utakmice igrači su opet bili uzbuđeni očekujući odluku koji će od njih nastupiti u prvoj momčadi. Postavlja se pitanje tko će zaigrati u sutrašnjoj utakmici, a da sve bude u skladu s dosad odigranim utakmicama.

Očekivano rješenje:

Zadatak se rješava od posljednje, 5. tvrdnje koja govori da ili igra Statić ili Penalić, dakle jedan igra sigurno. Ako se pretpostavi da igra Statić, tada uočavamo da prema 2. tvrdnji igraju i Golić i Penalić. Ako igra Penalić tada zbog 3. tvrdnje igra i Nogalić. Ako igra Golić, onda zbog 1. tvrdnje mora igrati i Bekić. Ako igra Bekić onda Nogalić ne igra zbog 4. tvrdnje. Sada uočavamo proturječnost jer tvrdimo istovremeno da Nogalić igra i ne igra. Početna pretpostavka da Statić igra je bila pogrješna. On ipak ne igra u prvoj momčadi. Ako pak Statić ne igra, onda je Penalić zbog 5. tvrdnje sigurno u prvoj momčadi. Ako igra Penalić, onda igra i Nogalić zbog 3. tvrdnje. Uočavamo da Bekić ne igra jer mogu igrati ili on ili Nogalić (4. tvrdnja). Jer ni Golić ni Statić ne igraju nije potrebno razmatrati 1. i 2. tvrdnju. Zaključuje se da u prvu momčad ulaze Penalić i Nogalić.

Učenici su imali teškoće pri rješavanju ovog zadatka, koji je prepoznat kao složeniji logički zadatak. Ukazana pomoć bile su upute od koje izjave treba započeti i kako je potrebno potom redom provjeravati ostale izjave. Učenici su bili u stanju pratiti ako – onda slijed, ali u slučaju kad pretpostavka nije zadovoljena nisu znali što činiti s tvrdnjom u danoj izjavi, primjerice utvrditi kad Golić ne igra da 1. izjava ne daje saznanja o tome igra li Bekić ili ne.

Samo je jedna učenica zapisala kako je razmišljala:



Slika 6. Učeničko rješenje 2. zadatka (Prilog 5.).

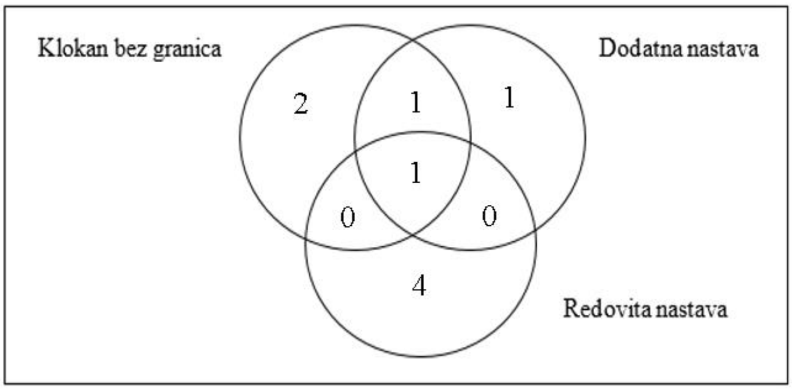
„Igraju Penalić i Nogalić zato što Statić ne može jer bi onda svi morali. Dakle mora Penalić. Ako igra Penalić igra i Nogalić. To znači da ne igra Bekić.“, dok su drugi učenici samo zapisivali tvrdnje koje su pročitali.

4.1.1. Evaluacija aktivnosti

Rad u paru ili skupini na 2. listiću (Prilog 2.) doprinio je brzini i kvaliteti rješenja. Učenici su po završetku aktivnosti ispunjavali evaluacijski upitnik. Rezultati anketa prikazani su u tekstu koji slijedi.

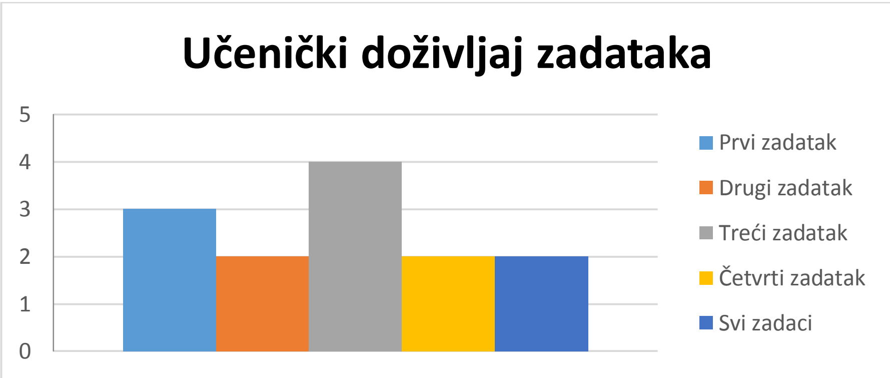
Od 13 učenika koji su prisustvovali susretima Male matematičke škole, 4 učenika nije se susrelo s logičkim zadacima. Devet učenika je izjavilo kako su rješavali slične zadatke i to (Slika 1.):

- na dodatnoj nastavi iz matematike prilikom pripremanja za gradska, a kasnije i županijska natjecanja (N=3),
- na međunarodnom natjecanju „Klokan bez granica“ (N=4) i
- vježbajući za pismenu provjeru u redovnoj nastavi (N=5).



Slika 7. Broj učenika s obzirom na iskustva u rješavanju logičkih zadataka.

Najvećem broju učenika svidio se treći zadatak jer je bio najlakši, zabavan i logičan. Svidjelo im se pratiti upute Stankovih kolega. Prvi zadatak svidio se trojici učenika jer im je bio najzanimljiviji. Po dvoje učenika odabralo je drugi odnosno četvrti zadatak kao onaj koji im se najviše sviđa. Drugi zadatak učenici biraju jer im je najlakši i jer su ga brzo shvatili, dok četvrti zadatak biraju jer im je zabavan, jer su tvrdnje *„fora“* i jer su morali otkriti tko laže. Dvojici učenika su se svidjeli svi zadaci. Bili su im zabavni i poučni. Također im se svidjelo što je u zadacima bilo potrebno *„mozgati“*.



Slika 8. Broj učenika kojima se svidio pojedini zadatak drugog listića (Prilog 2.).

Prema podacima ankete učenicima treći zadatak nije bio težak za rješavanje, jer ga nijedan učenik ga nije naveo kao zadatak koji je bio najteži. Možemo uočiti da se upravo taj zadatak i najviše svidio učenicima. Drugi zadatak je bio težak samo jednom učeniku *„jer moraš odgonetnuti tko je lagao o svom poslu“*. Prvi zadatak bio je težak dvjema učenicama jer im je teško bilo shvatiti koji dio tvrdnje je istinit, a koji lažan. Najteži je 4. zadatak i sedmero učenika ga je okarakteriziralo kao takav. Kao objašnjenje zašto im je ovaj zadatak bio najteži učenici navode sljedeće odgovore: *„To što je bila čudna logika.“, „Teško je bilo znati što je laž.“*. Dvoje učenika je reklo da im nijedan zadatak nije bio težak, a jednom učeniku su svi zadaci bili teški jer su bili „*previše zbunjujući*“. Tablica 5. prikazuje najčešće odgovore zašto je učenicima bilo teško rješavati određene zadatke.

Tablica 5. Najčešći odgovori zašto je učenicima bilo teško rješavati određene zadatke.

Zašto misliš da ti je bilo teško rješavati neke zadatke?	
Najčešći odgovori:	- *„Zbog toga jer u nekima moraš puno pisati i misliti.“* - *„Zato što su na malo lukav način zakomplicirani.“* - *„Jer je nešto istina, a nešto laž pa je teško pogoditi.“* - *„Zato što sam ih dugo rješavao.“* - *„Jer se na kraju zbunim kada nešto ne valja.“* - *„Zato što su to zadaci s kojima se prije nisam susrela, no bili su jako zabavni.“* - *„Zato što su bili komplicirani.“* - *„Jer nisam znala rješenja.“* - *„Zato što su teški.“* - *„Zato što nisam dovoljno razmišljala.“*

4.2. Rješavanje zadataka induktivnim zaključivanjem

Na drugom susretu rješavali su se zadaci koji zahtijevaju primjenu induktivnog zaključivanja. Učenici su dobili dva radna listića. Na svakom listiću nalazila su se po 4 zadatka (Prilog 3. i 4.).

Prvi radni listić (Prilog 3.) sastojao se od četiri zadatka pomoću kojih se ispitivalo jesu li učenici u stanju nastaviti geometrijske uzorke te prepoznati, opisati i proširiti pravilo po kojemu su dani oblici u uzorku.

Zadatak 1.[2]

Boris slaže kvadrate na sljedeći način:

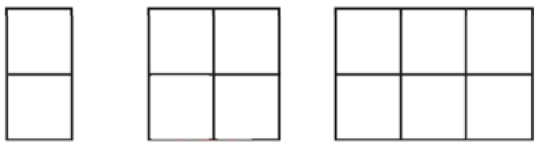


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a. Nacrtaj figuru 5.

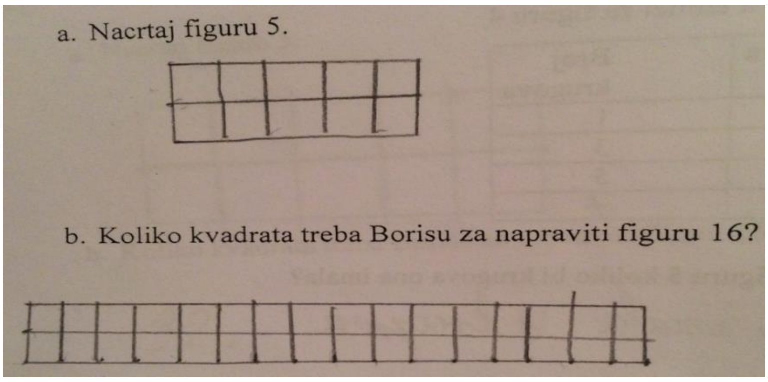
b. Koliko kvadrata treba Borisu za napraviti figuru 16?

Očekivano rješenje:

Broj kvadrata u svakoj sljedećoj figuri povećava za dva, pa peta figura ima deset kvadrata. Broj kvadrata u figuri je dvostruko veći od rednog broja figure u uzorku, pa za šesnaestu figuru treba $16 \cdot 2 = 32$ kvadrata.

[2]M041115, Numbers, Patterns and Relationships (Timss 2011 User Guide for the International Database, 2013.)

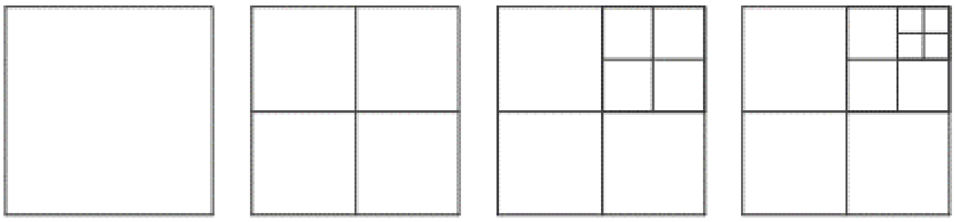
Rezultati pregledanih listića pokazuju da, od ukupno 13 učenika, njih 12 je točno nacrtalo zadanu figuru 5 koja se sastoji od 10 kvadrata. Samo jedan učenik nije točno riješio zadatak, on je nacrtao lik od 8 kvadrata. U b. zadatku svi učenici su pravilno zaključili da će za figuru 16 biti potrebno 32 kvadrata. Analizom listića, uočeno je da je dvoje učenika crtalo kako bi došli do rješenja, dok drugim učenicima crtež nije bio potreban da dođu do rješenja.



Slika 9. Učeničko rješenje prvog a. i b. zadatka (Prilog 3.).

Zadatak 2.[3]

Promotrimo niz kvadrata i njihovih dijelova. Kvadrati imaju 1, 4, 7, odnosno 10 dijelova.



Koliko dijelova će imati sljedeći kvadrat u nizu?

A. 11

B. 12

C. 13

D. 14

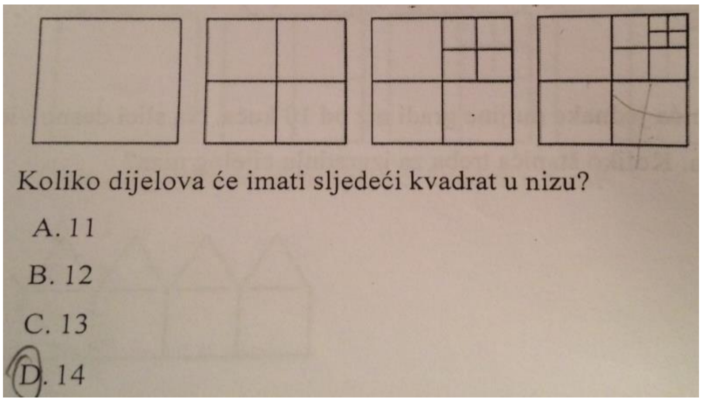
E. 15

Očekivano rješenje:

Broj kvadrata u svakoj sljedećoj figuri povećava se za tri dijela, pa peti oblik ima 10+3=13 kvadrata.

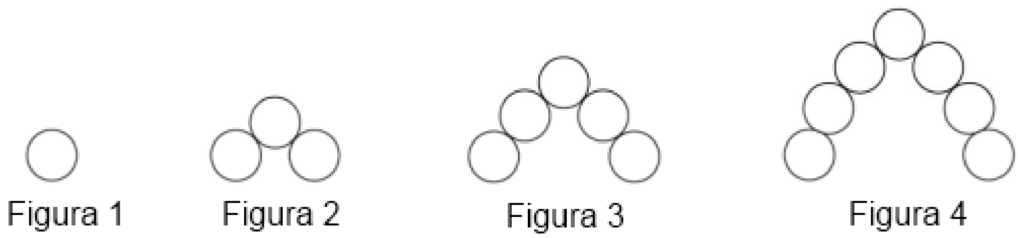
[3] Natjecanje „Klokan bez granica“, kategorija Ecolier, 3. zadatak (pitanja za 3 boda), 2008.

Ovaj zadatak je točno riješilo 8 od 13 učenika. Jedan učenik nije riješio ovaj zadatak. Ostali učenici su naveli kao točan odgovor D. Možemo pretpostaviti kako su učenici točno primijenili uzorak, ali nisu prepoznali kako je broj dijelova uvećan za tri nova jer je već postojeći dio podijeljen na četiri dijela. Četvero učenika je crtalo sljedeću figuru u nizu, od toga je troje točno primijenilo pravilo i točno odgovorilo na postavljano pitanje, dok je jedan učenik nacrtao četiri nova dijela na dijelu figure koja nije za to predviđena i netočno odgovorio na pitanje.



Slika 10. Primjer pogrješnog načina rješavanja 2. zadatka (Prilog 3.).

Zadatak 3.[4]



Niz od četiri figure prikazan je na slici gore.

a. Ispuni podatke u tablici za figuru 4

Figura	Broj krugova
1	1
2	3
3	5
4	

[4] M031079, Numbers, Patterns and Relationships (Timss 2011 User Guide for the International Database, 2013.)

b. Ako bi imali figuru 5 koliko bi krugova ona imala?
c. Ako se nastave crtati figure, koliko bi krugova imala figura 10 (nemoj crtati figure)?

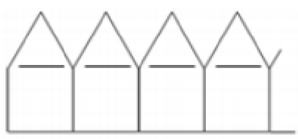
Očekivano rješenje:

U zadatku a. uočava se pravilnost da se broj krugova kod svake sljedeće figure povećava za dva kruga. Dakle, figura 4 će imati 7 krugova. U b. zadatku, i dalje vrijedi ista pravilnost pa je broj krugova pete figure 9. Za c. zadatak potrebno je prepoznati i proširiti pravilnost zadanu uzorkom. Figura 2 ima 2+1, figura 3 ima 3+2, figura 4 ima 4+3, pa će deseta figura imati 10+9=19 krugova.

Dvoje učenika nije uopće pokušalo riješiti ovaj zadatak. Preostalih 11 učenika točno je riješilo a. i b. zadatak. Četvero učenika nije točno odgovorilo na zadatak c. Učenici su ponudili odgovore 18 i 21 krug. Točno je odgovorilo sedam učenika. Niti jedan učenik nije ponudio tijek razmišljanja kako je došao do rješenja, samo odgovor. Možemo uočiti da učenicima predstavlja problem uspostaviti vezu između rednog broja figure u nizu i njenih karakteristika.

Zadatak 4.[5]

Sanja pomoću štapića jednake duljine gradi niz od 10 kuća. Na slici desno vidi se početak tog niza. Koliko štapića treba za izgradnju cijelog niza?



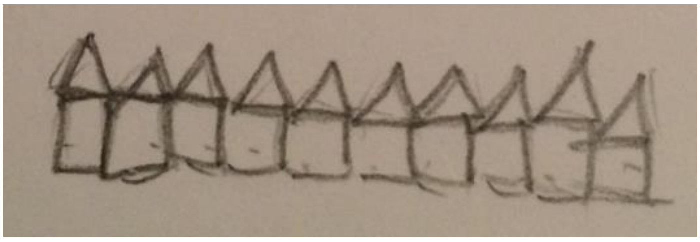
A.50
B.51
C.55
D.60
E.62

Očekivano rješenje:

Prva kućica ima šest štapića. Preostalih devet kućica imaju pet štapića. Ukupan broj štapića je $6 + 9 \cdot 5 = 6 + 45 = 51$.

Ovaj zadatak je točno riješilo 8 učenika koji su uočili da je za izgradnju cijelog niza potrebno $6 + 9 \cdot 5 = 6 + 45$, odnosno 51 štapić. Dvoje učenika nije riješilo ovaj zadatak, a troje ih je netočno odgovorilo. Oni su izračunali da je za ovaj niz potrebno 60 štapića. Neki učenici su zaključili kako je potrebno za ovakav niz 51 štapić, dok su neki crtali niz od deset kućica kako bi došli do rješenja.

[5] Natjecanje „Klokan bez granica“, kategorija Leptirići, 5. zadatak (pitanja za 4 boda), 2013.



Slika 11. Učeničko rješenje 4. zadatka (Prilog 3.).

Na ovome susretu učenici su dobili drugi radni listić (vidi prilog 4.) na kojem su se nalazila četiri zadatka unutar koncepta *Brojevi*. Učenici su imali značajne teškoće pri rješavanju ovih zadataka te su tražili pomoć i odustajali od rješavanja.

Zadatak 1.

Napiši nekoliko sljedećih članova niza:

a. 2, 3, 6, 7, 10, 11, ____[6]

b. 12, 6, 11, 7, 10, 8, ____

c. 3, 4, 6, 10, 18, 34, 66, ______________________________________[7]

d. 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ______________________________________[8]

Od 11 učenika koji su završili rješavanje ovoga listića, njih 10 je točno riješilo a. zadatak. Samo jedna učenica nije uočila da će sljedeći članovi niza biti 14, 15, 18, 19, 22, 23,… Uzorak u ovom nizu prati dvodijelno pravilo. Prva dva člana su uzastopni prirodni brojevi, dok je treći član niza za tri veći od prethodnog člana niza. Uzorak se ponavlja: broj – sljedbenik – broj za tri veći od prethodnog člana niza. Sljedeći član niza jest 10, jer je sljedbenik broja 6 broj 7 te kada njemu dodamo broj 3 dobijemo broj 10.

Zadatak b. niti jedan učenik nije točno riješio. Uzorak je složen na način da se brojevi na neparnim mjestima u nizu umanjuju za 1, a brojevi na parnim mjestima u nizu uvećavaju za 1. Sljedeći broj u nizu, sedmi po redu, je broj 9.

Zadatak c. točno je riješilo samo četvero učenika. Oni su uočili kako su razlike između članova niza redom 1, 2, 4, 8, 16 i 32. Na temelju toga sljedeća razlika između dva člana u

[6]Regionalno natjecanje iz matematike, Splitska regija, 1992., 4. razred

[7]Regionalno natjecanje iz matematike, Sinj, 1997., 4. razred

[8]Preuzeto (29. travnja 2015.) s http://matematikaos.blogspot.com/2010/04/logika-matematika.html

nizu je 64, te je sljedeći član niza 66 + 64 = 130.

Zadatak d. jedan učenik nije riješio dok je jedan učenik označio crticom da ga ne zna riješiti. Dvoje učenika je zbog nepažnje prilikom zbrajanja netočno riješilo zadatak. Preostali učenici, njih 7, točno su riješili ovaj zadatak. Oni su shvatili da su razlike između članova niza redom 1, 2, 3, 4, 5, 6 te sljedeća razlika mora biti 7 što znači da je sljedeći član niza 21 + 7 = 28.

Zadatak 2. (Pavleković, 2009.)

Promotri zbroj triju uzastopnih brojeva

1 + 2 + 3 = 6

2 + 3 + 4 = 9

3 + 4 + 5 = 12

Zapiši i izračunaj sljedećih nekoliko takvih zbrojeva. Što uočavaš?

Očekivano rješenje:

Zbroj uzastopna tri prirodna broja povećava se za tri, te su zbrojevi višekratnici broja tri. Uočava se da je zbroj bilo koja tri uzastopna prirodna broja višekratnik broja 3.

Ovaj zadatak su učenici s lakoćom riješili. Oni su to zapisali na sljedeće načine:

„Da je svaki rezultat veći od prethodnog za tri.“

„Da se zbroj povećava za tri.“

Učenici nisu prepoznali kako je općenito zbroj uzastopnih prirodnih brojeva višekratnik broja 3, nego ističu samo svojstvo pojedinačno promatranih slučajeva.

Zadatak 3. ČUDNO SVOJSTVO (Kurnik, 2011.)

Neki brojevi imaju čudno svojstvo. Primjerice:

22, $2 + 2 = 2 \cdot 2$

123, $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$

1124, $1 + 1 + 2 + 4 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4$

Opiši koje je to čudno svojstvo brojeva 22, 123, 1124. Možeš li se domisliti nekog peteroznamenkastog ili šesteroznamenkastog broja s istim svojstvom?

Očekivano rješenje:

Brojevi imaju svojstvo da je zbroj znamenaka jednak umnošku znamenaka. Uzorak po kojemu se izgrađuju takvi brojevi je promjena zadnje znamenke i dodavanje znamenki jedinice. Peteroznamenkasti takav broj je 11125 ($1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5$), a šesteroznamenkasti 111126.

Petero učenika to čudno svojstvo opisalo je na sljedeći način: *„To da je zbroj znamenki jednak umnošku znamenki.“*, *„To što je zbroj isti kao i umnožak.“*, *„To čudno svojstvo je da se ti brojevi mogu zbrajati i množiti i dobit ćeš isti broj.“*, a ostali učenici nisu opisali to svojstvo. Samo jedan učenik i učenica su uspjeli pronaći peteroznamenkasti i šesteroznamenkasti broj s tim svojstvom. Brojevi su bili sljedeći: 11133, 11125, 111126.

Zadatak 4. (Pavleković, 2008)

Svi prirodni brojevi počevši od 1, napisani su uzastopno u redu jedan iza drugog: 123456789101112131415161718192021222324… Koja je brojka u tom zapisu na stotom mjestu i u kojem se broju nalazi?

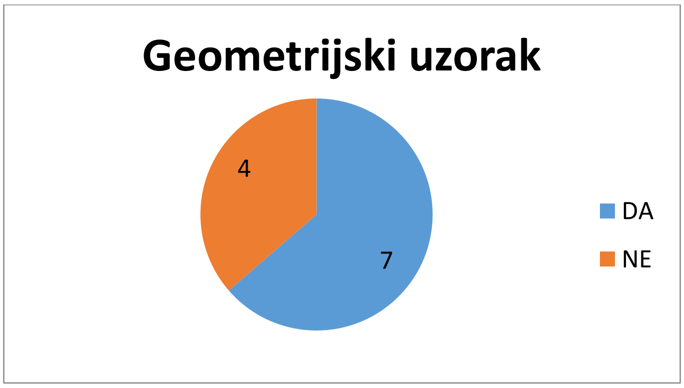
Očekivano rješenje:

Jednoznamenkastih prirodnih brojeva ima devet, pa nam je za to potrebno devet znamenki. Preostalu 91 znamenku raspodijelimo na dvoznamenkaste brojeve. 91 znamenka nam govori da ima 91:2=45 dvoznamenkastih brojeva i jedna znamenka viška. 45 dvoznamenkastih brojeva + 9 jednoznamenkastih jest ukupno 54 broja. Jedna znamenka koja je bila višak pripada broju 55, pa se brojka 5 nalazi na stotom mjestu u broju 55.

Sedmero učenika je točno riješilo ovaj zadatak. Među njima petero učenika je ispisivalo uzastopno sve brojeve počevši od 1 dok nisu došli do brojke koja se nalazila na stotom mjestu u tom zapisu, dok preostalo dvoje nije obrazložilo svoj odgovor. Jedan učenik je ponudio netočno rješenje bez obrazloženja, a troje ih je ostavilo prostor za rješavanje zadatka praznim.

4.2.1. Evaluacija aktivnosti

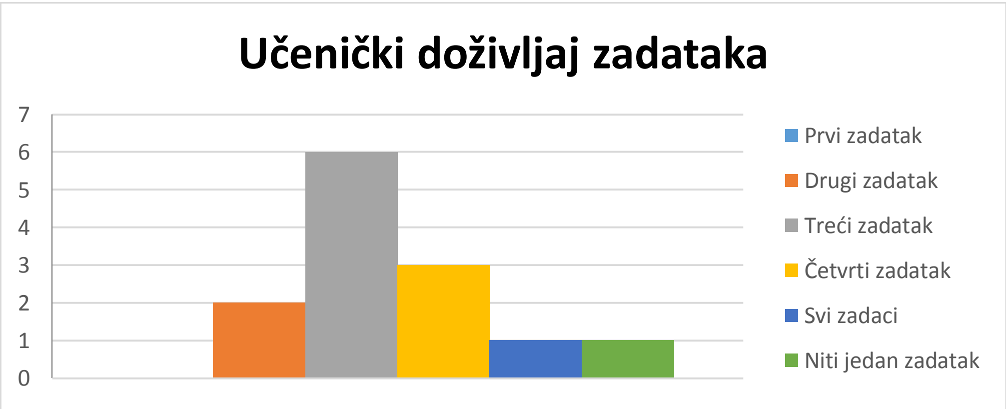
Po završetku aktivnosti učenici su ispunjavali dva evaluacijska upitnika koji su se odnosili na zadatke dvaju listića (Prilog 3. i 4.).



Slika 12. Broj učenika s obzirom na iskustva u rješavanju zadataka s geometrijskim uzorkom (Prilog 3.).

Od 13 učenika koji su rješavali zadatke s geometrijskim uzorkom, 2 učenika nije ispunilo upitnik. Prema anketi, 4 učenika nije se susrelo s ovakvim tipom zadataka (Slika 12.). 7 učenika se susrelo i rješavalo zadatke slične zadacima koji su rješavali. Učenici su se najčešće s ovakvim zadacima susreli:

- na dodatnoj nastavi iz matematike prilikom pripremanja za gradska, a kasnije i županijska natjecanja (N=4),
- na međunarodnom natjecanju „Klokan bez granica" (N=2) i
- vježbajući za pismenu provjeru u redovnoj nastavi (N=1).



Slika 13. Broj učenika kojima se svidio pojedini zadatak prvog listića (Prilog 3.).

Prvi zadatak svidio se samo učeniku kojemu su se svidjeli svi zadaci. On navodi da su zadaci *„Svi zabavni i moraš dobro razmišljati."* Drugi zadatak se svidio jednom učeniku i jednoj učenici. Treći zadatak se najviše svidio šestero učenika. Na pitanje zašto se učenicima ovaj zadatak svidio zabilježeni su sljedeći odgovori: *„Svi su zabavni i moraš dobro razmišljati."*, *„Zato što je trebalo upotrijebiti logiku."*, *„Zato što o njemu moraš puno razmišljati i stvarati si sliku u glavi."*,... Četvrti zadatak se svidio troje učenika. Ovaj zadatak im se svidio zato što: *„moraš logički razmišljati"*, *„zanimljiv i treba se zbrajati"* te *„moraš upotrijebiti logiku"*. Jednoj učenici se nije svidio niti jedan zadatak. Svoj odgovor nije obrazložila.

Prema podacima ankete, samo jedan učenik treći zadatak navodi kao najteži, iako je to zadatak koji su učenici najlošije riješili. Rješavanje drugog zadatka učenicima nije predstavljalo problem niti su ga u anketi naveli kao primjer zadatka koji im je bio težak, dok je najviše učenika (N=3) kao najteži zadatak istaknulo zadnji, četvrti zadatak. Učenici navode sljedeće razloge zbog kojih im je bilo teško rješavati ovaj zadatak: *„Zadnji je zadatak bio kompliciran pa si se trebao malo više potruditi."*, *„Odgonetnuti koliko štapića treba."*, *„Moramo sami računati, razmišljati i stvarati sliku u glavi."*

Učenicima je bilo teško rješavati zadatke:

- *„Jer ih je teško bilo riješiti na logiku pa se moraju rješavati crtanjem."*,
- *„Jer možda nisam shvatila nešto."*,
- *„Zato što sam puno morao misliti."*,
- *„Zato što nisam dovoljno razmišljala."*,
- *„Treba puno da se nađe logika."* i
- *„Ne znam."*

Učenici zadatke s drugog listića (Prilog 4.) nisu bili u stanju samostalno rješavati te su tražili pomoć, odustajali ili prepisivali. Samo jedan učenik i jedna učenica riješili su samostalno i točno sve zadatke koji su se nalazili na ovom listiću. Učenica se s ovakvim tipom zadataka susrela na dodatnoj nastavi iz matematike i međunarodnom natjecanju „Klokan bez granica" dok se učenik dotada nije susreo s takvim zadacima. Oboje su kao zadatak koji im se najviše svidio naveli prvi jer im je on bio najzanimljiviji. Učenici su svi zadaci bili lagani, dok je učeniku najteži za rješavanje bio 4. zadatak jer *„...je morao pisati sto znamenki."*

Ostali učenici koji su rješavali ove zadatke, nisu se susreli s ovakvom vrstom zadataka.

Prvi i drugi zadatak (Prilog 4.) istaknuli su kao zadatke koji su im se najviše svidjeli. Bilo im je posebno teško rješavati četvrti zadatak jer su morali: pisati sto znamenki, i razmišljati.

4.3. Aktivnost istraživanja pravilnosti u zadacima geometrijskog karaktera

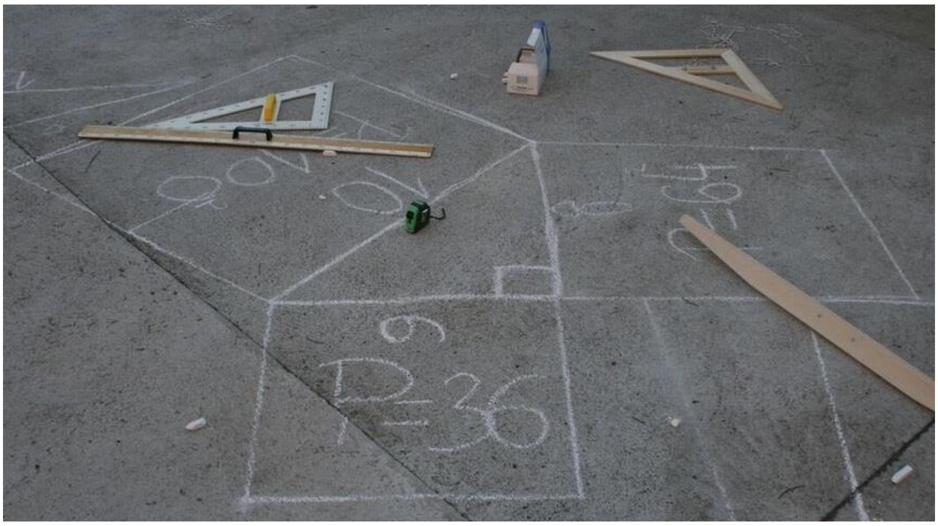
U sklopu istraživanja promatrana je jedna od provedenih radionica Male matematičke škole. Učenici su strategijom vođenog učenja otkrivanjem upoznali jedan od osnovnih teorema geometrije, Pitagorin poučak. S obzirom na ishode učenja dane u Nacionalnom okvirnom kurikulumu (2011.), tijekom radionice učenici su pokazali kompetencije iz koncepata *Oblik i prostor* i *Mjerenje* te procesa *Prikazivanje i komunikacija* i *Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje*, a posebno su:

- saslušali i razmjenjivali matematičke ideje i objašnjenja te su suradnički rješavali zadatke,
- postavljali matematici svojstvena pitanja te su stvarali i istraživali pretpostavke o matematičkim objektima, pravilnostima i odnosima,
- prepoznali, imenovali te nacrtali jednostavne ravninske oblike,
- izračunali opseg trokuta te površinu kvadrata.

Tijek radionice:

Učenicima je pokazano uže duljine 24 dm na kojemu su istaknute točke udaljene 1 dm. Tražilo se procijeniti duljinu užeta. Učenici su podijeljeni u skupine po troje i trebali su pomoću dobivenog užeta izgraditi trokute različitih duljina stranica. Učenici su zajednički računali, dogovarali se i provjeravali koja treba biti duljina stranica trokuta kako bi im opseg bio 24 dm. Prvi trokuti kojih su se učenici dosjetili su bili stranica 8-8-8, 10-7-7, 9-9-6, a tek na poticaj voditelja su se dosjetili trokuta stranica 10-8-6, 10-10-4, 11-8-5, 4-11-9. Učenici su nadalje identificirali vrste trokuta s obzirom na duljine stranica i veličinu kutova, nacrtali kvadrate nad stranicama svih trokuta i odredili površine tih kvadrata. Prepoznali su među kvadratima nad stranicama trokuta kvadrat najveće površine i usporedili njegovu površinu sa zbrojem površina preostala dva kvadrata.

Slika 14. Pravokutni trokut opsega 24cm.



Slika 15. Pravokutni trokut opsega 24cm.

Evaluacija radionice

Učenici su bili motivirani, zainteresirani i aktivno su sudjelovali u radionici. Suradnički rad te strategija vođenog učenja otkrivanjem olakšali su realizaciju radionice. S obzirom na postavljene zahtjeve učenici su imali teškoće s procjenjivanjem duljine danog užeta i tumačenjem što znači nacrtati kvadrat nad stranicama trokuta, posebno koji je položaj i duljine stranica traženog lika. Uočeno je kako učenici lakše određuju duljine stranica jednakostraničnog i jednakokračnih trokuta nego raznostraničnog trokuta zadanog opsega. Učenici su uspješno i samostalno imenovali različite vrste trokuta s obzirom na duljinu stranice, crtali trokute i kvadrate, računali i uspoređivali površine kvadrata. Iako nisu bili upoznati s vrstama trokuta s obzirom na veličinu unutrašnjih kutova, izuzev pravokutnog trokuta, učenici su uz pojašnjenje voditeljice uspješno identificirali pojedine vrste trokuta. Uspješnost učenika u realizaciji pojedinih zahtjeva radionice može biti povezano sa zahtjevima nastavnog programa, dostupnim zadacima i aktivnostima u udžbenicima te strategijama poučavanja koje se koriste na redovitoj nastavi.

Vođenim otkrivanjem učenici su došli do sljedećih zaključaka:

- površina najvećeg kvadrata nad stranicama šiljastokutnog trokuta manja je u odnosu na zbroj površina druga dva kvadrata;
- površina najvećeg kvadrata nad stranicama pravokutnog trokuta jednaka je u odnosu na zbroj površina druga dva kvadrata;
- površina najvećeg kvadrata nad stranicama tupokutnog trokuta veća je u odnosu na zbroj površina druga dva kvadrata.

5. ZAKLJUČAK

Provedeno akcijsko istraživanje usmjereno je propitkivanju primjerenosti odabranih zadataka i aktivnosti razvojnoj dobi učenika te valjanosti za razvijanje procesa *Logičkog mišljenja, argumentiranja i zaključivanja.* Odabrani zadaci su dostupni učenicima i/ili učiteljima početne nastave matematike te je stoga istraženo u kojoj mjeri su se učenici susretali s takvim zadacima. Samo istraživanje je ograničeno s obzirom na uzorak i plan istraživanja. U istraživanju su sudjelovali učenici s posebnim interesom za matematiku stoga njihov uspjeh treba uzeti sa zadrškom u odnosu na učenike iste dobi. Nadalje, odabrani zadaci i aktivnosti su tek mali dio sadržaja vezanih uz proces *Logičkog mišljenja, argumentiranja i zaključivanja* koji se mogu implementirati u početnoj nastavi matematike.

Opservacija, učenička pisana rješenja i evaluacijski upitnici koji su bili sastavnice istraživačke komponente akcijskog istraživanja ukazuju na sljedeće

- Učenici su se s odabranim zadacima uglavnom susretali na dodatnoj nastavi matematike tijekom priprema za matematička natjecanja ili natjecanje „Klokan bez granica".
- Suradnički rad i strategija vođenog učenja otkrivanjem doprinose aktivnom sudjelovanju učenika u nastavi, motivaciji, pobuđivanju interesa i komunikaciji vlastitih ideja.
- Učenici su sposobni pratiti slijed logičkog rasuđivanja u određenim prilikama, ali imaju teškoće u komunikaciji vlastitog rasuđivanja, uglavnom daju „skraćenu verziju" odnosno opisuju samo zadnji korak vlastitog rasuđivanja.
- Učenici imaju teškoće u tumačenju istinitosti složenih matematičkih sudova, posebice negacije izjave koja je konjunkcija dvaju izjava ili valjanosti tvrdnje kad pretpostavka u implikaciji nije zadovoljena.
- Učenici svoj neuspjeh najčešće pripisuju nedovoljnom trudu, ali i nerazumijevanju zahtjeva zadatka, složenosti zadataka ili činjenici kako su im zadaci nepoznati.
- Učenici nemaju razvijeno induktivno mišljenje koje bi im omogućilo uspješno rješavati odgovarajuće zadatke. U stanju su nastaviti jednostavne obrasce, ali imaju teškoće u prepoznavanju složenih obrazaca i njihovom proširivanju na proizvoljni član niza. Nisu u stanju poopćiti svojstva pojedinačnih slučajeva te se pri rješavanju zadatka uglavnom pomažu ispisivanjem svih potrebnih slučajeva.
- Učenici su u stanju primijeniti vlastita znanja i vještine tijekom aktivnog poučavanja strategijom vođenog otkrivanja kako bi prepoznali pravilnost u

zadacima geometrijskog karaktera koja je izvan okvira redovite nastave matematike u njihovoj dobi.

Zadatak nastave matematike je razvijati sve komponente matematičke kompetencije, posebice k tomu rasuđivanje, argumentiranje i komunikaciju primjerenu dobi učenika. Početna nastava matematike ima odgovornost postaviti temelje ovim kognitivnim procesima. U ovom radu dani su samo neki primjeri zadataka i aktivnosti koje potiču razvijanje odgovarajućih kompetencija. Značajan je doprinos u prepoznavanju logičkih zadataka koje učenici rješavaju samostalno i oblika izjava kojima teško tumače istinitost, uočavanju nerazvijenosti induktivnog rasuđivanja poradi manjka odgovarajućih aktivnosti u nastavi matematike te pozitivnog efekta provedbe aktivnosti istraživanja i uočavanja pravilnosti u zadacima geometrijskog karaktera.

Osim za učenike, provedene aktivnosti mogu biti korisne i zanimljive učiteljima. Kao jedna od pozitivnih strana akcijskog istraživanja ističe se prilika za upoznavanje načina na koji učenici razmišljaju i dolaze do rješenja. Spoznaje o učeničkim sposobnostima omogućavaju učiteljima prilagodbu procesa poučavanja prema ostvarenju individualnih učeničkih postignuća, a posebno otkrivanju novih matematičkih sadržaja. Ukoliko se uoče poteškoće prilikom svladavanja matematičkog sadržaja i samostalnog rješavanja zadataka, učitelj je dužan utvrditi na kakvu teškoću je učenik naišao, je li mu njegova pomoć potrebna i u kojoj mjeri. Kada to utvrdi, učitelj je dužan pomoći učeniku kako bi uspješno izvršio zadatak koji se pred njega postavio. Stav kako nisu dovoljno razmišljali ili se nisu dovoljno trudili, koji su učenici iznijeli u upitnicima kao razlog neuspjeha, otvara pitanje odgovornosti učitelja. Učenik je mogao uložiti maksimalan trud, no ako nastavnik tijekom školovanja kod učenika ne aktivira i potiče proces *Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje* odgovarajućim saktivnostima učenik neće postizati očekivani i željeni uspjeh.

PRILOZI

Prilog 1. Zadaci predviđeni za individualan rad

1) Koja je znamenka umjesto slova A?

   AAA+AA+A+A+A=1000

2) Tri brata, Siniša, Tomica i Perica, učenici su osnovne škole i polaze različite razrede. Siniša nije stariji od Perice, a Tomica nije stariji od Siniše. Tko je najstariji, a tko najmlađi od njih?

3) Tri dječaka došla su na igralište s loptama A, B i C različitih boja. Jedna lopta je smeđa, druga žuta, a treća plava. Koje su boje lopte ako je samo jedna od tri izjave istinita:

   d) A je plava lopta,
   e) B nije plava lopta,
   f) C nije smeđa lopta?

4) Četiri učenice: Branka, Ljiljana, Nela i Vlasta, igrale su međusobno mali teniski turnir. Na kraju je stigla njihova prijateljica Snježana i zanimala se za redoslijed. U nadvikivanju i smijehu prijateljica je „zapamtila“ ova tri odgovora:

   d. Vlasta je bila druga, a Ljiljana je osvojila treće mjesto.
   e. Ljiljana je bila četvrta, a Branka je bila druga.
   f. Nela je bila druga, a Vlasta je pobijedila.

   U svakoj izjavi jedan je dio istinit, a drugi neistinit. Koji je poredak mladih tenisačica?

Prilog 2. Zadaci predviđeni za rad u paru ili skupini po troje učenika

IME I PREZIME UČENIKA KOJI RADE ZAJEDNO:

RIJEŠI ZADATAK I OBJASNI!!!

1. Na vaterpolo turniru sudjelovale su četiri momčadi: Dupin, Trp, Maslina i Ježinac. Dakako, prije početka turnira navijači su pokušali pogoditi konačni ishod turnira. Navijači su dali sljedeće prognoze:
   a. Ako je Ježinac prvi, onda je Maslina druga
   b. Ako je Ježinac drugi, onda je Dupin treći
   c. Ako je Dupin zadnji, onda je Trp drugi.

   Prognoze su se ispunile polovično – svaki od trojice imao je jedan pogodak i jedan promašaj u svojoj prognozi. Koji je bio konačni redoslijed na kraju turnira?
2. Imao otac četiri sina: Marka, Vinka, Luku i Nikolu. Svaki od njih krenuo je u svijet da izuči neki zanat. Jedan je učio za kovača, drugi za tesara, treći za pekara, a četvrti za mesara. Kad su završili svoje naukovanje, vratiše se sinovi ocu i on ih zapita što je tko naučio, a oni mu ovako odgovoriše:

   Marko: „Niti sam kovač, niti sam pekar."

   Vinko: „Nisam kovač."

   Luka: „Ja sam kovač."

   Nikola: „Ja sam pekar."

   Ipak, ako vam otkrijemo da za razliku od ostalih jedan od sinova nije rekao istinu, možete li odrediti koji je to bio?
3. Student Stanko Logić nedavno je polagao pismeni ispit koji se sastojao od pet tvrdnji za koje je trebalo odgovoriti jesu li istinite ili lažne. Dakle, odgovor na svako pitanje bio je ili DA ili NE. Stanko se za ispit slabo pripremio, no zato je bio dobro obaviješten o strukturi testa. Starije kolege su mu rekle:

   1.. ako je odgovor na prvo pitanje DA, tada je odgovor na drugo NE,

   2.. odgovori na prvo i posljednje pitanje su isti,

   3.. odgovori na drugo i četvrto pitanje su suprotni,

   4.. odgovor na barem jedno od posljednja dva pitanja je DA,

   5.. odgovora DA ima više nego odgovora NE.

   Kada je Stanko pročitao ispitne zadatke, shvatio je da ni na jedno od postavljenih pitanja ne zna odgovoriti. Ipak, uzevši u obzir upute svojih kolega, koje su se kasnije pokazale potpuno točne, i dobro razmislivši, ubrzo je uvidio da na četiri pitanja zna odgovor. Koja su to pitanja?

4. Tijekom istrage, provedene nakon pljačke poštanskog ureda, svoje izjave su dala i trojica svjedoka koja su se zatekla u pošti u vrijeme prepada. To su bili Antun Slabovid, Branko Okić i Damir Previd. Međutim, njihove su izjave proturječile jedna drugoj, a na suočenju je svaki od njih optuživao nekog od preostalih za neistinu.

   A. Antun: Brano laže!

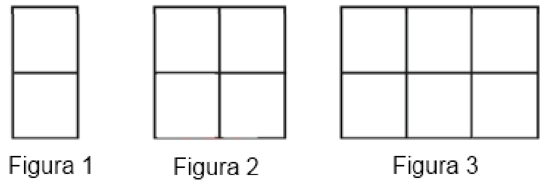
   B. Branko: Damir laže!

   C. Damir: I Antun I Branko lažu!

   U prvi trenutak učinilo se da je istraga dovedena u bezizlazan položaj i da od tih svjedoka neće biti nikakve koristi. Ipak istražitelj je uz malu domišljatost i bez dodatnih pitanja zaključio koji od trojice svjedoka govori istinu. Kako?

Prilog 3. Zadaci predviđeni za individualan rad učenika

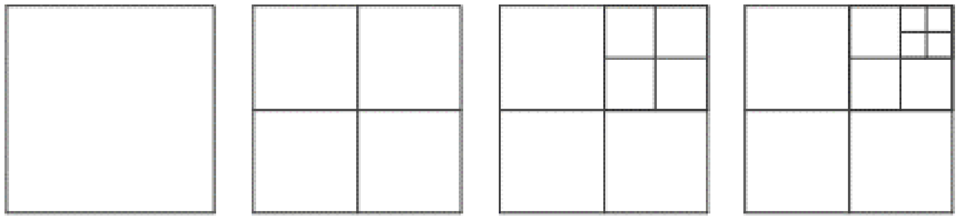
1. Boris slaže kvadrate na sljedeći način:



   a. Nacrtaj figuru 5.

   b. Koliko kvadrata treba Borisu za napraviti figuru 16?

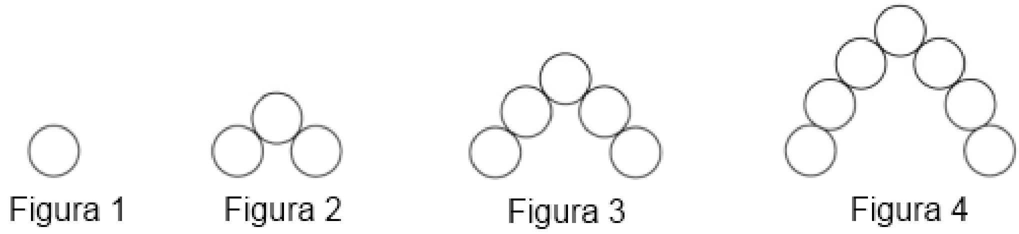
2. Promotrimo niz kvadrata i njihovih dijelova. Kvadrati imaju 1, 4, 7, odnosno 10 dijelova.



   Koliko dijelova će imati sljedeći kvadrat u nizu?

   a. 11
   b. 12
   c. 13
   d. 14
   e. 15

3.



Niz od četiri figure prikazan je na slici gore.

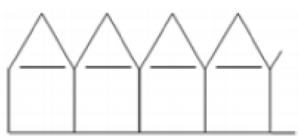
a) Ispuni podatke u tablici za figuru 4

Figura	Broj krugova
1	1
2	3
3	5
4	

b) Ako bi imali figuru 5 koliko bi krugova ona imala?

c) Ako se nastave crtati figure, koliko bi krugova imala figura 10 (nemoj crtati figure)?

4. Sanja pomoću štapića jednake duljine gradi niz od 10 kuća. Na slici desno vidi se početak tog niza. Koliko štapića treba za izgradnju cijelog niza?



a. 50
b. 51
c. 55
d. 60
e. 62

Prilog 4. Zadaci predviđeni za individualan rad učenika

1. Napiši nekoliko sljedećih članova niza:
   a) 2, 3, 6, 7, 10, 11, ______________________________
   b) 12, 6, 11, 7, 10, 8, ______________________________
   c) 3, 4, 6, 10, 18, 34, 66, ______________________________
   d) 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ______________________________

2. Promotri zbroj triju uzastopnih brojeva

   $1 + 2 + 3 = 6$

   $2 + 3 + 4 = 9$

   $3 + 4 + 5 = 12$

   Zapiši i izračunaj (desno) sljedećih nekoliko takvih zbrojeva. Što uočavaš?

____

____

3. Neki brojevi imaju čudno svojstvo. Primjerice:

   22, $2 + 2 = 2 \cdot 2$

   123, $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$

   1124, $1 + 1 + 2 + 4 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4$

   Opiši koje je to čudno svojstvo brojeva 22, 123, 1124.

____

____

Možeš li se domisliti nekog peteroznamenkastog ili šesteroznamenkastog broja s istim svojstvom?

____

____

4. Svi prirodni brojevi počevši od 1, napisani su uzastopno u redu jedan iza drugog: 1234567891011121314151617181920212223324...

   Koja je brojka u tom zapisu na stotom mjestu i u kojem se broju nalazi?

____

Prilog 5. Zadaci predviđeni za dodatni rad

1.. Filip, Marko i Ilija igrali su se loptom ispred kuće Slavka Žestića kada je udarac jednog od njih uputio loptu u smjeru Žestićeva prozora. Pomoći nije bilo. Okno se razletjelo u tisuću komadića i u istom trenutku Žestić je istrčao na ulicu tražeći od djece da odmah priznaju koji je od njih razbio prozor. Dječaci su izrekli sljedeće tvrdnje:

a) Filip: Niti sam ja, niti je Marko razbio prozor.
b) Marko: Niti sam ja, niti je Ilija razbio prozor.
c) Ilija: Nisam razbio prozor i ne znam tko je to učinio.

Ipak, dječaci nisu u svojim izjavama bili posve iskreni. Svaki od njih kazao je samo jednu istinitu tvrdnju, dok je ona druga bila lažna. Navedeni podaci posve su dovoljni da se nađe „razbijač“ Žestićeva prozora.

2.. Golić, Bekić, Penalić, Nogalić i Statić rezervni su igrači u nogometnoj momčadi i često poneki od njih zaigra iza prvu momčad. Iz dosadašnjih utakmica poznato je:

a. ako igra Golića, tada zaigra i Bekić
b. ako igra Statić, tada uvijek ulaze i Golić i Penalić
c. Penalić i Nogalić, ili obojica igraju ili ne igraju
d. ili Bekić igra ili Nogalić igra, ali ne i oba
e. igra ili Penalić ili Statić, ili obojica igraju

Dan prije utakmice igrači su opet bili uzbuđeni očekujući odluku koji će od njih nastupiti u prvoj momčadi. Postavlja se pitanje tko će zaigrati u sutrašnjoj utakmici, a da sve bude u skladu s dosad odigranim utakmicama.

Prilog 6. Anketa nakon rješavanja određene skupine zadataka

IME I PREZIMEUČENIKA/CE: ____

1. Jesi li se ikada susreo/la s ovakvim zadacima?

    a) DA b) NE

2. Ako da, kada i gdje?

3. Koji zadatak ti se najviše svidio? Zašto?

    Zašto?

4. Koji zadatak ti je bio najteži za rješavanje?

    Što ti je bilo teško?

5. Zašto misliš da ti je bilo teško rješavati neke zadatke?

LITERATURA

[1] Bieda, Kristen N., Ji, X., Drwencke, J., Picard, A. (2014.) Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research*, 64, 71–80.

[2] Bijelanović Dijanić, Ž. (2011.) Učenje matematike otkrivanjem uz pomoć programa dinamičke geometrije *Geogebra* – Akcijsko istraživanje. U M. Pavleković (Ur.) *The Third International Scientific Colloquium MATHEMATICS AND CHILDREN* (str. 491. – 507.). Osijek: Element.

[3] Bognar, L., (1999.) *Metodika odgoja*. Osijek: Sveučilište Josipa Jurja Strosmajera u Osijeku, Pedagoški fakultet.

[4] Cohen, L., Manion, L. i Morrison, K. (2007.) *Metode istraživanja u obrazovanju*. Jastrebarsko: Naklada Slap.

[5] Glasnović Gracin, D. (2007.) Matematička pismenost 2. dio. *Matematika i škola*, VIII (40), 202. – 210.

[6] *Hrvatsko matematičko društvo :: Domaća*. Hrvatsko matematičko društvo. Pristupljeno 29. travnja 2015. na www.matematika.hr/natjecanja/domaca

[7] *Hrvatsko matematičko društvo :: Klokan*. Hrvatsko matematičko društvo. Pristupljeno 29. travnja 2015. na www.matematika.hr/klokan/

[8] Kurnik, Z. (2001.) Dokaz. *Matematika i škola,* II (9), 149. – 155.

[9] Kurnik, Z. (2009.a) Dedukcija. *Matematika i škola,* XI (51), 5. – 11.

[10] Kurnik, Z. (2009.b) *Znanstveni okviri nastave matematike.* Zagreb: Element.

[11] Kurnik, Z. (2010.) *Posebne metode rješavanja matematičkih zadataka.* Zagreb: Element.

[12] Kurnik, Z. (2011.) *Zabavna matematika u nastavi matematike*. Zagreb: Element.

[13] Kurnik, Z. (2013.) *Oblici matematičkog mišljenja.* Zagreb: Element.

[14] *Logički zadaci - Zabavna MaTeMaTiKa*. Pristupljeno 29. travnja 2015. na http://matematikaos.blogspot.com/2010/04/logika-matematika.html

[15] Marinković, S. (2002.) *Zabavna matematika 3.* Zagreb: Element.

[16] Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, P., O'Sullivan, C. Y., & Preuschoff, C. (2012). *TIMSS 2011 Assessment Frameworks*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

[17] *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje*. (2011.) Zagreb: Ministarstvo znanosti obrazovanja i športa.

[18] Ovčar, S. (1990.) *Razvijanje mišljenja u nastavi matematike.* Čakovec: TIZ Zrinski.

[19] Pavleković, M. (2008.). *Metodika nastave matematike s informatikom I* (3. izdanje). Zagreb: Element.

[20] Pavleković, M. (2009.). *Matematika i nadareni učenici. Razvoj kurikula na učiteljskim studijima za prepoznavanje, izobrazbu i podršku darovitih učenika*. Zagreb: Element.

[21] Polonijo, M. (1983.) *Matematički problemi za radoznalce.* Zagreb: Školska knjiga.

[22] Polonijo, M. (1995.) *Matematičke razbibrige za nove radoznalce.* Zagreb: Element.

[23] Polonijo, M. (2002.) *Matematičke zavrzlame: priručnik za kreativne matematičare.* Zagreb: Profil.

[24] Polya, G. (2003.) *Matematičko otkriće.* Zagreb: HMD.

[25] Preporuka Europskog parlamenta i savjeta od 18. prosinca 2006. o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje. (2010.) *Metodika*, 20 (11), 174. – 182.

[26] Stylianides, Andreas J. (2007.) The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 1. – 20.

[27] *TIMSS 2011. Izvješće o postignutim rezultatima iz matematik*e. (2012). NCVVO. Preuzeto 24. 4. 2015. s http://dokumenti.ncvvo.hr/TIMSS/Dokumenti/TIMSS_2011_mat.pdf

[28] *Timss 2011 User Guide for the International Database*. (2013.) International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

[29] *Upute za provedbu natjecanja iz matematike 2014.* Agencija za odgoj i obrazovanje. Pristupljeno 27. kolovoza 2015. na http://www.azoo.hr/index.php?option=com_content&view=article&id=4135:natjecanje-iz-matematike-2011&catid=301:matematika&Itemid=118