

# Razvijanje konceptata opsega i površine u razrednoj nastavi matematike

---

**Kostecki, Sara**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Education / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:141:075401>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-01**



*Repository / Repozitorij:*

[FOOZOS Repository - Repository of the Faculty of Education](#)



SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI

Sara Kostecki

**RAZVIJANJE KONCEPATA OPSEGA I POVRŠINE U  
RAZREDNOJ NASTAVI MATEMATIKE**

DIPLOMSKI RAD

Osijek, 2024.



SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI

Integrirani prijediplomski i diplomski sveučilišni Učiteljski studij

**RAZVIJANJE KONCEPATA OPSEGA I POVRŠINE U  
RAZREDNOJ NASTAVI MATEMATIKE**

DIPLOMSKI RAD

Metodika matematike I

Mentor: doc. dr. sc. Ana Katalenić

Student: Sara Kostecki

Matični broj: 0267042537

Modul: B - smjer informatika

Osijek, rujan, 2024.

*Zahvaljujem svojoj mentorici, doc. dr. sc. Ani Katalenić, na iznimnom strpljenju, podršci i dragocjenim savjetima tijekom studiranja i pisanja diplomskog rada. Od prvog dana na fakultetu bili ste mi uzor, a vaša stručnost, znanje i kompetencije uvijek su me inspirirali i impresionirali. Hvala vam što ste svojim radom i posvećenošću značajno pridonijeli mom obrazovanju.*

*Zahvaljujem kolegicama, profesorima, mentorima i svima ostalima čija imena neću navoditi, a koji su obogatili moje studentske dane i pridonijeli mom profesionalnom i osobnom razvoju.*

*Zahvaljujem svojoj obitelji, roditeljima i sestri, koji su mi svojom potporom i ljubavlju omogućili da postanem osoba koja sam danas i bez kojih ovaj rad ne bi postojao.*

*Posebnu zahvalnost upućujem Zvonimiru, koji je tijekom svih pet godina studiranja bio moj najveći oslonac i izvor motivacije. Njegovo stalno ohrabrenje, razumijevanje i podrška bili su neprocjenjivi i od presudne važnosti za moj uspjeh.*

## SAŽETAK

Cilj ovog diplomskog rada je istražiti prilike za razvijanje koncepata opsega i površine u razrednoj nastavi matematike. Teorijski okvir rada temelji se na komponentama matematičke sposobnosti koje uključuju konceptualno znanje, proceduralno znanje, stratešku kompetenciju, prilagodljivo zaključivanje i produktivnu dispoziciju. Pregled relevantne literature obuhvaća istraživanja o ulozi udžbenika u nastavi matematike, faze razvijanja kompetencije mjerenja i specifičnosti učenja i poučavanja opsega i površine.

Metodologija se temelji na kvalitativnoj analizi udžbenika za razrednu nastavu matematike. Analizirani su zadaci vezani uz opseg i površinu s ciljem utvrđivanja u kojoj mjeri potiču razvoj kompetencije mjerenja i matematičke sposobnosti. Kroz ovu analizu identificirani su ključni aspekti u udžbenicima koji mogu pridonijeti kontinuiranom i progresivnom razvoju koncepata opsega i površine.

Rezultati istraživanja ukazuju na to da se koncepti opsega i površine ne razvijaju sukladno preporukama literature. Posebno, komponente matematičke sposobnosti, svojstava opsega i površine i faze razvijanja kompetencija mjerenja nisu adekvatno integrirane. Istraživanje također sugerira da postoje značajne razlike u načinu na koji različiti udžbenici pristupaju zadacima vezanim uz ove pojmove. Rad pruža smjernice za unaprjeđenje nastavnih materijala i udžbenika kako bi se osigurala dosljednija i sveobuhvatnija podrška razvoju matematičkih sposobnosti učenika. Preporučuje se veća usmjerenost na integraciju različitih komponenti matematičke sposobnosti u zadacima vezanima uz opseg i površinu te uvođenje koncepata u početne razrede osnovne škole prateći niže faze razvijanja kompetencije mjerenja.

**Ključne riječi:** analiza udžbenika, matematička sposobnost, opseg, površina, nastava matematike

# **DEVELOPING THE CONCEPTS OF PERIMETER AND AREA IN PRIMARY MATHEMATICS EDUCATION**

## **ABSTRACT**

The aim of this graduate thesis is to investigate opportunities for developing the concepts of perimeter and area in primary mathematics education. The theoretical framework of the study is based on the components of mathematical proficiency, including conceptual knowledge, procedural knowledge, strategic competence, adaptive reasoning, and productive disposition. The literature review encompasses research on the role of textbooks in mathematics education, phases in the development of measurement competency and specifics of learning and teaching perimeter and area.

The methodology is based on a qualitative analysis of textbooks for primary mathematics education. Tasks related to perimeter and area were analysed to determine the extent to which they support the development measurement competency and of mathematical proficiency. This analysis identified key aspects in textbooks that could contribute to the continuous and progressive development of the concepts of perimeter and area.

The research results indicate that the concepts of perimeter and area do not develop according to the literature recommendation. Namely, components of mathematical proficiency, properties of perimeter and area, and phases in the development of measurement competency are not adequately integrated. The study also suggests significant differences in how different textbooks approach tasks related to these concepts. The thesis provides guidelines for improving teaching materials and textbooks to ensure more consistent and comprehensive support for the development of students' mathematical abilities. It is recommended to focus more on integrating different components of mathematical proficiency in tasks related to perimeter and area and to introduce these concepts in the early grades of primary education corresponding to lower phases in the development of measurement competency.

**Keywords:** textbook analysis, mathematical proficiency, perimeter, area, mathematics education

# SADRŽAJ

SAŽETAK.....	I
ABSTRACT .....	II
SADRŽAJ .....	III
UVOD .....	4
PREGLED RELEVANTNE LITERATURE.....	5
Komponente matematičke sposobnosti.....	5
Udžbenici u nastavi matematike .....	7
Učenje i poučavanje opsega i površine .....	8
Poteškoće učenika vezane uz koncepte opsega i površine.....	11
METODOLOGIJA.....	16
Istraživačka pitanja.....	16
Kvalitativna analiza udžbenika .....	16
REZULTATI.....	20
Opseg i površina u predmetnom kurikulumu i udžbenicima .....	20
Faze razvijanja kompetencije mjerenja i svojstva opsega i površine.....	22
Komponente matematičke sposobnosti u zadacima vezanima uz opseg i površinu	25
RASPRAVA.....	29
ZAKLJUČAK .....	32
POPIS LITERATURE .....	33
Prilog 1 .....	35



## UVOD

Matematika igra ključnu ulogu u obrazovnom sustavu i kognitivnom razvoju djeteta. Izravno utječe na razvoj sposobnosti analitičkog mišljenja, rješavanja problema te logičkog zaključivanja. U tom području, važnost konceptualnog razumijevanja temeljnih matematičkih pojmova, poput opsega i površine, ne može se zanemariti. Ovi su pojmovi prisutni na svim razinama obrazovanja, od početnih razreda osnovne škole do srednjih škola i fakulteta. Upravo je zato njihovo razumijevanje ključno za daljnji uspjeh učenika. Međutim, istraživanja pokazuju da učenici često imaju poteškoća u usvajanju tih koncepata, što može biti posljedica nedovoljno strukturiranog pristupa njihovom poučavanju.

Razlozi za odabir ove teme temelje se na potrebi za poboljšanjem pristupa matematičkim sadržajima u razrednoj nastavi, s ciljem osiguravanja potpunijeg i dugotrajnijeg razumijevanja pojmova opsega i površine. U obrazovnom procesu često se naglasak stavlja na rješavanje zadataka, dok su aktivnosti koje potiču praktičnu primjenu naučenog u stvarnim situacijama manje zastupljene. Stoga je važno istražiti način na koji su ovi sadržaji predstavljeni u udžbenicima te kako dostupni zadaci i aktivnosti pridonose razvoju matematičkih kompetencija kod učenika.

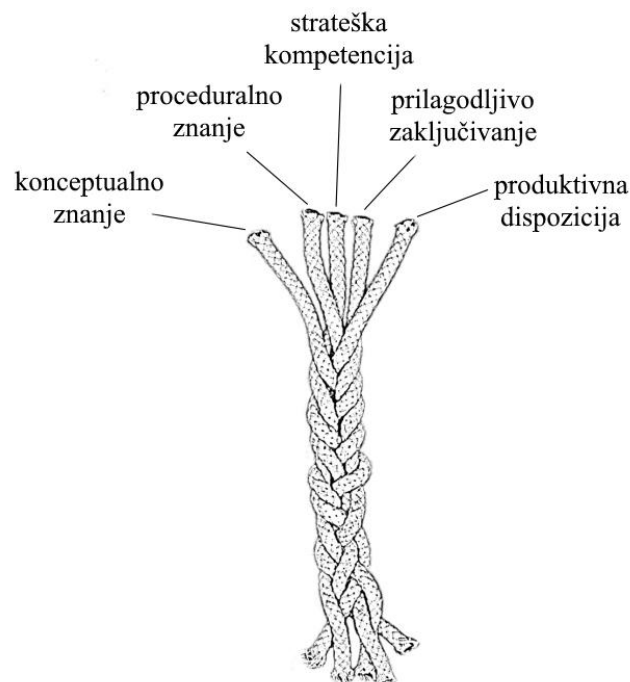
Cilj ovog diplomskog rada je analizirati udžbenike za razrednu nastavu matematike s naglaskom na sadržaje vezane uz opseg i površinu te ispitati u kojoj mjeri zadaci u udžbenicima podržavaju razvoj matematičkih sposobnosti učenika. Kroz pregled literature i kvalitativnu analizu udžbenika, istražit će se u kojoj mjeri zadaci u udžbenicima potiču razvoj različitih komponenti matematičkih sposobnosti. Također, postavlja se pitanje omogućava li postojeći pristup kontinuirani razvoj znanja o opsegu i površini u nastavi matematike.

Konačno, ovim će se radom pružiti uvid u moguća poboljšanja nastavnih materijala kako bi se osigurala kvalitetnija i učinkovitija nastava vezano uz opseg i površinu, koja će učenicima omogućiti dublje razumijevanje ovih važnih matematičkih koncepata.

## PREGLED RELEVANTNE LITERATURE

### Komponente matematičke sposobnosti

Shvaćanje matematičke uspješnosti u školskom kontekstu se, u skladu s napretkom društva i školstva, mijenjalo kroz povijest. U prvoj je polovici 20. stoljeća fokus bio na vještom izvođenju aritmetičkih postupaka. Kroz iduća desetljeća, on se pomicao na razumijevanje strukture matematike i njezinih ideja, no vrlo brzo se ponovno počela veličati brzina i preciznost, a zanemarivati dubinsko razumijevanje. Potkraj stoljeća, razvila se reforma s ciljem podizanja svijesti o važnosti razvijanja različitih komponenti važnih za matematičku sposobnost, a uključivale su logičko razmišljanje, rješavanje problema, povezivanje matematičkih ideja i komunikaciju s drugima (Kilpatrick, 2009). Nakon mnogobrojnih istraživanja i analiza, Kilpatrick (2009) je zaključio da na uspješnost u matematici utječe više različitih aspekata koje nije moguće izdvojiti kao zasebne cjeline jer se međusobno isprepliću i nadopunjuju. Sukladno tome, uveo je pojam matematičke sposobnosti te ga opisao kroz pet komponenti. Smatra da se pravilnim poticanjem njihovog razvoja učenicima pruža prilika da postanu vrlo uspješni u usvajanju matematičkih znanja i vještina. Sve komponente su jednako bitne za razvijanje matematičke sposobnosti, a uključuju konceptualno znanje, proceduralno znanje, stratešku kompetenciju, prilagodljivo zaključivanje i produktivna dispozicija kako je prikazano na Slici 1.



Slika 1 Komponente matematičke sposobnosti (Kilpatrick, 2009)

Konceptualno znanje podrazumijeva duboko shvaćanje matematičkih pojmova. Ono omogućuje učenicima da povežu nove informacije s prethodnim znanjem, koriste matematičke ideje u različitim kontekstima te lakše pamte i rekonstruiraju pojmove, svojstva i postupke kada ih zaborave. Omogućava učenicima da prepoznaju i koriste različite prikaze matematičkih situacija, doprinoseći koherentnom sagledavanju matematike. Proceduralno znanje obuhvaća sposobnost učinkovitog i preciznog korištenja matematičkih postupaka te razumijevanje njihovih međusobnih odnosa. Važno je za razvoj matematičkih vještina jer omogućuje učenicima da rješavaju zadatke precizno i brzo, koristeći pomagala prema potrebi. Strateška kompetencija podrazumijeva sposobnost prepoznavanja, formuliranja i rješavanja matematičkih problema koristeći razne strategije i prikaze. Uključuje razvoj matematičkog mišljenja za primjenu u svakodnevnim situacijama, naglašavajući proces, aktivnost i znanje. Prilagodljivo zaključivanje uključuje sposobnost logičkog razmišljanja i povezivanja pojmova kako bi se riješili matematički problemi te opravdali i argumentirali zaključci. Ova komponenta omogućava učenicima da primijene matematičko mišljenje u raznim kontekstima, koristeći formalne i neformalne metode. Produktivna dispozicija odnosi se na pozitivni stav prema matematici, vjerovanje u njenu korisnost i razumljivost te uvjerenje da se trudom mogu postići dobri rezultati. Učenici koji razvijaju takav stav često imaju veću motivaciju i uspjeh u matematici jer vjeruju da mogu savladati sadržaj i riješiti probleme kroz upornost i vježbu (Jukić Matić i Matić, 2017).

Cilj nastave jest usvajanje novih znanja i vještina. Ukoliko želimo da se nove informacije kod učenika zadrže dugoročno, važno je da ih oni u potpunosti razumiju, a zatim i samostalno primjenjuju. Važnu ulogu pri tom ima upravo konceptualno znanje što je „integrirano i funkcionalno shvaćanje matematičkih ideja“ (Suh, 2007, str. 164). Ono podrazumijeva poznavanje matematičkih pojmova, operacija i relacija (Suh, 2007). U skladu s time, važno je koncepte graditi postupno i uz promjene konteksta koje će omogućiti učenicima da razlikuju promjenjiva svojstva od stalnih te da koncepte povežu s drugim, ranije usvojenim konceptima i znanjima. Konceptualno znanje je podložno promjenama i s vremenom se, uz mnogobrojne primjere, poboljšava te postaje sve jasnije definirano. Osoba s vremenom postaje sve sigurnija u ispravnost vlastitih postupaka i u stanju je samostalno i ispravno primjenjivati novostečena znanja u različitim kontekstima.

Istraživanja pokazuju da konceptualni pristup poučavanju matematike ima niz prednosti u odnosu na tradicionalni pristup, orijentiran na proceduralno znanje, koji se fokusira na

memoriranje formula i postupaka. Prilikom istraživanja utjecaja konceptualnog pristupa učenja na proceduralno znanje, prema Horvat Dmitrović i Žgaljić Keko (2019), dokazano je da su učenici, koji su prilikom učenja stavljali veći naglasak na konceptualno razumijevanje, sposobni rješavati probleme i koristiti matematičke metode na fleksibilniji i kreativniji način od učenika koji su sadržaju pristupali na tradicionalan način. Iako su testovi provjere znanja u istraživanju napravljeni u skladu s tradicionalnim poučavanjem i ispituju poznavanje definicija i teorije, uspješniji su bili oni učenici koji su imali kvalitetnije konceptualno znanje. Razlog leži iza toga što su svjesni ne samo kako izvršiti postupak, već i zašto ga izvršavaju. Također, konceptualni pristup poboljšava motivaciju i interes učenika za matematiku (Horvat Dmitrović i Žgaljić Keko, 2019). Učenje kroz razumijevanje koncepata i njihovu primjenu u stvarnom životu je mnogo privlačnije od memoriranja formula i rješavanja ponavljajućih zadataka. To dovodi do aktivnijeg sudjelovanja u nastavi, poboljšanja koncentracije i razvijanja kompetencije u matematici. Važno je napomenuti da konceptualni pristup ne znači zanemarivanje proceduralnog znanja. Proceduralne vještine su i dalje potrebne za rješavanje problema i izvođenje matematičkih operacija. Međutim, čvrsta osnova za razumijevanje zašto i kako se procedure koriste, dovodi do dubljeg, fleksibilnijeg i motiviranijeg učenja sadržaja matematike (Horvat Dmitrović i Žgaljić Keko, 2019).

### **Udžbenici u nastavi matematike**

Matematički udžbenici su neprocjenjiv element edukativnog procesa i izvor znanja učenicima. Oni su im jedan od temelja stjecanja matematičkih znanja i vještina. Predstavljaju strukturiranu i sustavnu prezentaciju ključnih informacija, koncepata i principa unutar određenog predmeta, a u ovom slučaju matematike (Glasnović Gracin, 2014).

Prema Zakonu o udžbenicima i drugim obrazovnim materijalima za osnovnu i srednju školu (2018) udžbenik predstavlja obvezni obrazovni materijal koji je usklađen s Udžbeničkim standardom. Najčešći mu je oblik knjiga (tiskana ili elektronička), a dozvoljeni su i drugi formati u skladu s propisima. Udžbenički set može sadržavati i radnu bilježnicu, vježbenicu, zbirku zadataka i slično. Glavna mu je svrha biti cjeloviti izvor učenicima za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda iz predmetnog kurikulumu te očekivanja međupredmetnih tema. Svojim sadržajem i strukturom treba biti podrška učenicima za samostalno učenje te poticati stjecanje različitih razina i vrsta kompetencija.

Njihova uloga u nastavi seže daleko od jednostavnog pružanja materijala za učenje i utječe na razne aspekte obrazovanja te doprinosi ostvarivanju obrazovnih ciljeva i kvaliteti

učenja. Sadržaj u udžbenicima bi trebao biti metodički oblikovan tako da potiče učenike na aktivno sudjelovanje u procesu učenja uzimajući u obzir intelektualne sposobnosti i područja interesa učenika određene dobi. Udžbenici i udžbenički setovi nisu samo izvor znanja učenicima, nego su i, zbog svoje pedagoške karakteristike, učiteljima okvir za strukturiranje lekcija, pomoć u odabiru relevantnih tema i aktivnosti te praćenja napretka učenika. Oni nisu ograničeni samo na upotrebu u učionici, već ih učenici mogu koristiti i za individualno učenje kod kuće, ponavljanje sadržaja, rješavanje zadataka i provjeru znanja. Na taj način mogu preuzeti aktivnu ulogu u svom edukativnom procesu i samostalno se usavršavati (Glasnović Gracin, 2014).

### **Učenje i poučavanje opsega i površine**

Opseg i površina su mjeriva obilježja likova. Opseg je zbroj duljina dužina i zakrivljenih crta koje omeđuju geometrijski lik (Igaly i sur., 2015, str. 92), a površina je mjera protežnosti dvodimenzijskoga skupa (Igaly i sur., 2015, str. 107).

Mjerenje je važna tema u razrednoj nastavi matematike jer se primjenjuje u raznim aspektima života, od školskih zadataka do osnovnih životnih vještina potrebnih za matematičku pismenost. Isto tako, opseg i površina su mjeriva obilježja koja se primjenjuju na geometrijske oblike i strukture u matematici i svakodnevnom životu. Kompetencija mjerenja se razvija u fazama. U početnoj fazi nema svijesti o mjerivom obilježju, nema prepoznavanja niti objašnjenja po čemu se oblici i predmeti razlikuju. Svjesnost o mjerivom obilježju se razvija opisnim vrednovanjem obilježja i uspoređivanjem po mjerivim obilježjima, nešto je dulje ili kraće, veće ili manje (Cheeseman i sur., 2014; Van de Walle i sur., 2016). U ovoj fazi dva lika se uspoređuju po površini vizualno i preklapanjem. Kad su likovi međusobno slični tada ih se može usporediti po veličini, odnosno površini, tako da se direktno postave jedan preko drugog, poravnaju po odgovarajućim rubovima i provjeri koji je manji odnosno veći (Slika 2.A). U slučaju da likovi nisu slični mogu se usporediti po veličini, odnosno površini, rastavljanjem na odgovarajuće dijelove (Slika 2.B).



A. Uspoređivanje sličnih likova po veličini

B. Uspoređivanje likova po veličini rastavljanjem na dijelove

**Slika 2 Uspoređivanje likova po veličini**

Sljedeća faza je mjerenje nestandardnim jedinicama i fizičkim modelima mjernih jedinica. Navedeno pomaže učenicima da se usredotoče na sam koncept mjerenja i njegovu ispravnost pružajući bolji temelj za prelazak na standardne jedinice. Preduvjet za ovu fazu i sljedeće faze u poučavanju opsega i površine je odgovarajuće znanje i sposobnosti u mjerenju i primjenjivanju duljine objekata. U ovoj fazi opseg lika se određuje obrublivanjem špagom, slamkama za piće, štapićima ili papirnatim trakicama jednake duljine, palčevima, laktovima, korakom i slično, a površina se određuje popločavanjem sukladnim likovima, poput kvadratnih pločica, samoljepljivih papirića i slično. Iako nije nužno da pri popločavanju likovi budu kvadratnog oblika poželjno je koristiti kvadratne pločice kao nestandardnu mjernu jedinicu za površinu prije uvođenja standardnih mjernih jedinica za površinu (Van de Walle i sur., 2016).

Iduću fazu obilježava upoznavanje s različitim mjernim instrumentima i standardnim mjernim jedinicama. Preporuča se prvo izraditi vlastite mjerne instrumente s jasno istaknutim standardnim mjernim jedinicama. U ovoj fazi za mjerenje opsega može se izraditi savitljiva mjerna traka s istaknutim oznakama za mjerenje duljine, a za mjerenje površine može se izraditi prozirna kvadratna mreža s jediničnim kvadratima (kvadratni milimetri, kvadratni centimetri ili kvadratni decimetri) ili kvadratne pločice odgovarajućih dimenzija (kvadratni centimetri ili kvadratni decimetri). Na ovaj način, razvija se konceptualno znanje o svojstvima mjerenja, proceduralno znanje postupka mjerenja, strateška kompetencija odabira odgovarajućeg mjerila i odgovarajuće standardne mjerne jedinice u pojedinoj situaciji te prilagodljivo zaključivanje o potrebnoj razini preciznosti (Van de Walle i sur., 2016).

Posljednja faza, prema Van de Walle i sur. (2016) je ispravna primjena znanja, vještina i koncepata vezanih uz mjeriva obilježja te upotreba formula. Opseg i površina se kao mjeriva obilježja primjenjuju u različitim situacijama u matematici i svakodnevnom životu. Kad je riječ o upotrebi formula razlikuju se zadaci:

- a) zadan je lik i treba izmjeriti duljine stranica i odrediti opseg i površinu lika,
- b) zadane su duljine stranica i treba odrediti opseg i površinu lika,
- c) zadani su opseg ili površina i duljine nekih stranica i treba odrediti duljine preostalih stranica lika.

Umjesto stranica mogu biti zadane druge mjere koje se koriste u formuli za opseg i površinu lika. Primjer zadatka koji odgovara primjeni površine u realističnoj situaciji i upotrebi formule prema posljednjem slučaju je:

Površina radne plohe stola u učionici iznosi  $65 \text{ dm}^2$ . Jedan od ponuđenih stolnjaka će savršeno odgovarati površini stola. Odaberi odgovarajući i obrazloži svoj odgovor. Ovo su dimenzije dostupnih stolnjaka: (a) duljina 1 m, širina 55 cm, (b) duljina 13 dm, širina 500 mm, (c) duljina 1 m i 6 dm, širina 45 cm.

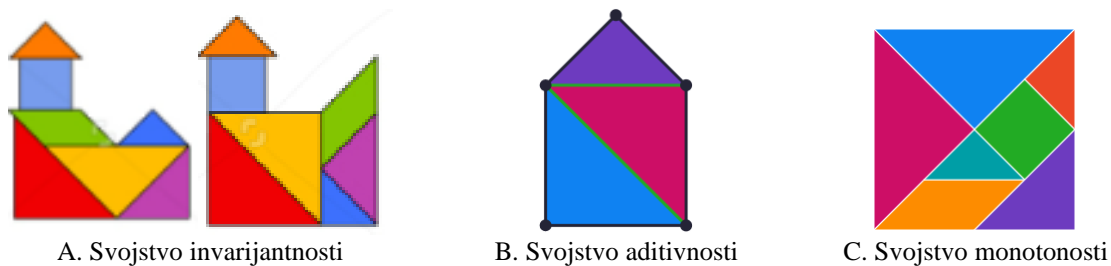
U zadatku ovog tipa, provjerava se svijest o važnosti upotrebe odgovarajućih mjernih jedinica i pretvaranja različitih mjernih jedinica, ispravnost preračunavanja mjernih jedinica, računanje površine te sposobnost donošenja ispravne odluke o rješenju danog problema na temelju provedenih računa što doprinosi razvijanju različitih komponenti matematičke sposobnosti.

Iznimno je važno i poznavanje načela mjerenja i svojstava mjerivih obilježja vezanih uz opseg i površinu (Liebeck, 1995; Pavković i Veljan, 2004; Van de Walle i sur., 2016) koja su navedena ispod.

- Mjeri se preciznim ujednačavanjem koristeći istovrsnu jediničnu mjeru. Primjerice, pri mjerenju opsega štapićima, potrebno je koristiti štapiće jednake duljine te ih slagati po rubu objekta tako da pokriju cijeli rub bez preklapanja i praznina; odnosno pri mjerenju površine sukladnim pločicama, trebaju biti posložene preko cijele površine objekta tako da se površina u potpunosti prekriva bez praznina ili preklapanja.
- Mjeriva obilježja zadovoljavaju svojstvo tranzitivnosti. U slučaju površine, ako lik A ima veću površinu od lika B, a lik B površinu veću od lika C, tada lik A ima veću površinu od lika C. Primjerice, na Slici 2.A, zeleni trokut je manji od ljubičastog trokuta i ljubičasti trokut je manji od crvenog trokuta pa je zeleni trokut manji od crvenog trokuta.
- Invarijantnost je bitno svojstvo mjerivih obilježja. U slučaju površine, odnosi se na svojstva da sukladni likovi imaju jednaku površinu; površina lika ostaje ista bez obzira na način na koji je lik okrenut ili pomaknut; likovi različitih oblika i dimenzija mogu imati isti opseg odnosno istu površinu. Primjerice, na Slici 3.A, dva lika kuće različitog oblika su jednake površine jer su sastavljeni od istih dijelova, konkretno dijelova tangram slagalice.
- Površina ima svojstvo aditivnosti. Ukupna površina složenog lika jednaka je zbroju površina njegovih dijelova. Posebno to znači da likovi koji su sastavljeni od istih dijelova imaju istu površinu. Aditivnost ne vrijedi za opseg, to jest, opseg složenog lika

nije jednak zbroj opsega njegovih dijelova. Primjerice, na Slici 3.B, lik oblika kućice je peterokut sastavljen od dva sukladna jednakokračna pravokutna trokuta, plave i crvene boje, i jednog manjeg jednakokračnog pravokutnog trokuta ljubičaste boje. Površina peterokuta jednaka je zbroju površina plavog, crvenog i ljubičastog trokuta, ali opseg peterokuta nije jednak zbroju opsega tih trokuta. Opseg peterokuta jednak je zbroju duljina pet stranica koje ga omeđuju istaknutih crnom bojom na slici. Zbrajanjem opsega trokuta od kojih je sastavljen peterokut uračunavaju se stranice trokuta koje nisu stranice peterokuta istaknute zelenom bojom na slici.

- Površina ima svojstvo monotonosti. Ako je lik A sadržan u liku B, onda je površina lika A manja od površine lika B. Primjerice, na Slici 3.C, dijelovi tangram slagalice sastavljeni su u veliki kvadrat. Taj je kvadrat veće površine od zelenog kvadrata koji je jedan dio tangram slagalice. Monotonost ne vrijedi za opseg; Kochova pahuljica je fraktalna krivulja kojoj se opseg povećava brojem iteracija dok je sadržana u kvadratu čiji je opseg konačan.



Slika 3 Prikaz svojstava mjerivih obilježja

Provođenjem aktivnosti kroz sve faze razvijanja kompetencije mjerenja, razvijaju se znanja i vještine vezane uz koncepte mjerivog obilježja u području matematike (povezujući svoje znanje s drugim matematičkim konceptima poput volumena i proporcija), ali i svakodnevnom životu (određivanje količine boje potrebne za bojanje zidova sobe određene površine ili određivanje duljine ograde potrebne za ograđivanje određenog vrta).

### **Poteškoće učenika vezane uz koncepte opsega i površine**

Poteškoće koje učenici imaju s opsegom i površinom mogu se povezati s različitim komponentama matematičke sposobnosti. Na konceptualnoj razini, učenici često ne razumiju princip očuvanja površine (invarijantnost) prilikom promjene oblika, bilo da je riječ o pomicanju ili preslagivanju dijelova. Na istoj se razini pojavljuje poteškoća pri razumijevanju veze između opsega i površine. Mogući razlog ove teškoće jest nedostatak vizualizacije i manipulativnih aktivnosti što učenicima stvara teškoću prilikom shvaćanja apstraktnih



pojmovna. Fiangga (2014) predlaže da se navedene teškoće mogu ispraviti kroz aktivnosti s tangramom, didaktičkim sredstvom korisnim za razvijanje razumijevanja koncepta opsega i površine kroz igru i slaganje različitih figura. On se sastoji od 7 dijelova koji se mogu složiti u mnogobrojne oblike. S obzirom na to da je uvijek riječ o jednakom broju dijelova, površina dobivenih likova je uvijek jednaka, a opseg se može značajno mijenjati.

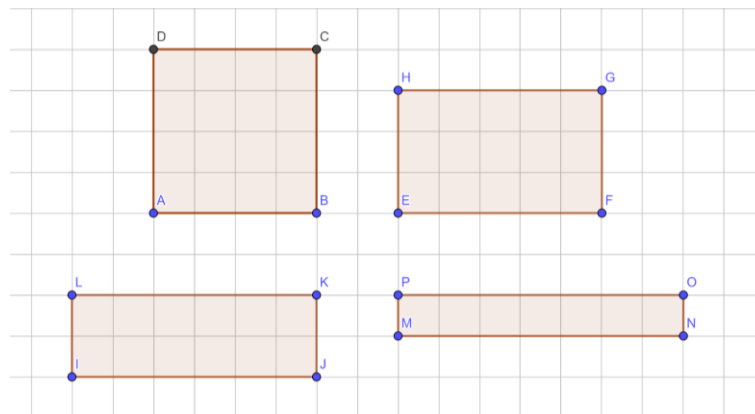
Na proceduralnoj razini, problemi nastaju pri primjeni formula i mjernih jedinica. Površina je učenicima apstraktniji pojam jer formula za računanje uključuje množenje dviju dimenzija (duljine i širine), što rezultira kvadratnim mjernim jedinicama, dok je opseg jednostavniji za razumijevanje jer se mjeri samo zbrajanjem duljina stranica i izražava se u poznatim linearnim mjernim jedinicama (Winarti i sur., 2012). Učenici uglavnom nemaju teškoće pri računanju opsega i površine u direktnim zadacima kad su poznate sve mjere i formula koju treba primijeniti. Preuranjeno uvođenje formula bez dovoljno kontekstualnog razumijevanja dovodi do toga da učenici znaju formule napamet, ali ne razumiju njihovu primjenu, tj. koncepte na kojima su one izgrađene. Primjerice, kako ispravno primijeniti formulu za opseg ili površinu kada jedna od veličina nije poznata te se očekuje koristiti relevantna svojstva lika, njegova opsega ili površine. Potrebno je formule uvoditi postepeno kroz konkretne primjere i praktične zadatke prateći tempo koji odgovara učenicima. Iako su formule ključne u matematici, ne bi trebalo dopustiti da ih učenici koriste kao prečac za brže računanje dok ne steknu potpuno razumijevanje koncepta koji stoje iza njih (Fiangga, 2014).

Strateški gledano, učenici mogu imati poteškoće u donošenju odluke kada koristiti opseg, a kada površinu za rješavanje problema. Korijen problema se nalazi u nerazumijevanju ovih koncepta u potpunosti i pretjeranu fokusiranost na rješenje zadatka ili korištenje formule. Navedeno u konačnici dovodi do neprepoznavanja konteksta relevantnog za korištenje opsega i površine. Korištenje zadataka temeljenih na stvarnim situacijama može pomoći u odabiru pravilne strategije rješavanja. Na primjer, zadaci ograđivanja dvorišta, obrublivanja likova ili građenja likova od štapića mogu pomoći u razvijanju svijesti o opsegu. Zadaci sastavljanja različitih pravokutnika od jednakog broja kvadratnih pločica ili popločavanja površina u neposrednoj okolini pomažu u razvijanju svijesti o površini. Još jedna poteškoća jest prihvaćanje činjenice da za nepromijenjenu vrijednost površine može postojati više različitih likova koji imaju različite vrijednosti opsega i obrnuto (Winarti i sur., 2012). Učenici često miješaju koncepte opsega i površine što se vidi iz tendencije razmišljanja kako dva različita lika s jednakom površinom imaju i jednak opseg. Kako bi se ispravila ova teškoća korisno je

istraživati izoperimetrijski problem i njemu bliske probleme (Pavleković, 2009, str. 95-96). Temeljni izoperimetrijski poučak navodi da od svih likova zadanoga opsega u ravnini, najveću površinu ima krug. Poučci primjereni za poučavanje u razrednoj nastavi matematike su:

1. Među svim pravokutnicima istog opsega najveću površinu ima kvadrat.
2. Među svim pravokutnicima iste površine najmanji opseg ima kvadrat.

Na Slici 4 dana su četiri pravokutnika istog opsega (16 cm), ali različite površine. Površina pravokutnika ABCD iznosi  $16 \text{ cm}^2$ , površina pravokutnika EFGH iznosi  $15 \text{ cm}^2$ , površina pravokutnika IJKL iznosi  $12 \text{ cm}^2$ , a površina pravokutnika MNOP iznosi  $7 \text{ cm}^2$ .



**Slika 4 Pravokutnici istog opsega i različite površine**

Poteškoće s prilagodljivim zaključivanjem odnose se na logičko zaključivanje i argumentiranje. Primjerice, učenici mogu imati problem s razumijevanjem principa očuvanja površine ili invarijantnosti, i objašnjavanjem zašto dva lika s jednakom površinom mogu imati različite opsege ili obrnuto. Navodi se da učenici teško prihvaćaju činjenicu da preslagivanjem dijelova lika, površina ostaje ista. Samim time, teže dolaze do različitih načina izračunavanja površine nepravilnih likova. Iako bi se površina lika mogla shvatiti kao broj jediničnih kvadrata koji ga prekrivaju u potpunosti i bez preklapanja, učenici često ne razmišljaju o mjerenju površine kao o prekrivanju dijela ravnine koju lik zauzima jediničnim kvadratima. Sukladno tome, učenici vrlo teško samostalno dolaze do zaključka da se dva polovična jedinična kvadrata mogu preslagivanjem nadopuniti u jedan cijeli i tako prebrojati bez da to utječe na početnu vrijednost površine lika (Yuberta i sur., 2011).

Također, učenici mogu imati poteškoće s refleksijom na vlastite postupke i argumentiranjem korištenja određene strategije za rješavanje problema što izravno utječe i na njihovu percepciju matematike. Kada učenici ne vide neposrednu primjenu matematike u

stvarnom životu i smisao njezina učenja, često gube motivaciju što narušava produktivnu dispoziciju. Nedostatak samopouzdanja u vlastite matematičke sposobnosti može rezultirati izbjegavanjem izazovnih zadataka i nedostatkom upornosti u rješavanju problema. Na navedene se poteškoće može utjecati pružanjem podrške i korištenjem primjerenih nastavnih metoda. Važno je prilagoditi razinu težine zadataka i očekivanja sposobnostima učenika jer pretjerano teški zadaci mogu negativno utjecati na njihovo samopouzdanje i motivaciju za učenje. Značajnu ulogu imaju i aktivnosti koje uključuju praktične primjere i interaktivne zadatke kroz koje učenici mogu bolje razumjeti i primijeniti matematičke koncepte. Produktivna dispozicija ne samo da izravno potiče razvoj svih ostalih komponenti matematičke sposobnosti, već i napredak u tim komponentama uzajamno jača produktivnu dispoziciju (Winarti i sur., 2012).

Usvajanje koncepta opsega i površine od značajne je važnosti u razrednoj nastavi matematike jer se time grade temelji za mnoge druge i kompleksnije koncepte u višim razredima i srednjoj školi poput opsega i površine mnogokuta, kruga i drugih likova unutar stereometrije, trigonometrije i analitičke geometrije, volumena unutar planimetrije, određivanja površine ispod krivulje unutar integralnog računa i drugo. Općepoznatu činjenicu da učenici imaju značajne poteškoće u razumijevanju koncepta opsega i površine podržavaju i mnogobrojna istraživanja. Jedan od razloga poteškoća jest način na koji se sadržaji ovoga tipa poučavaju. Tradicionalan pristup za cilj ima što brže usvajanje i točno primjenjivanje formula, dok se razumijevanje koncepta zanemaruje (Haris i Ilma, 2011). Učenicima je potrebno dati priliku da samostalno istraže obrasce, elemente i strukturu pojmova koje uče prije nego im se „na gotovo“ da formula koju ne razumiju. Iako znaju koristiti mjerne instrumente i primjenjivati formule, to nužno ne znači da razumiju koncept koji se nalazi iza toga (Haris i Ilma, 2011).

Istraživanja pokazuju da učenici učinkovitije usvajaju matematičke koncepte, poput opsega i površine, kada im se omogući aktivno sudjelovanje i prilika za samostalno prezentiranje vlastitih ideja, uz poticajnu podršku učitelja (Winarti i sur., 2012). Uloga učitelja u ovom kontekstu trebala bi se usmjeriti na postavljanje poticajnih pitanja i davanje slobode učenicima da samostalno formiraju mišljenja te dolaze do zaključaka kako bi se potaklo dublje razumijevanje. Osim individualnog rada, društvena interakcija među učenicima također igra važnu ulogu. Dijeljenje znanja kroz rad u paru, grupni rad ili razrednu raspravu omogućuje učenicima da međusobno razmjenjuju ideje, rješavaju poteškoće i bolje razumiju koncepte. Povezivanjem različitih nastavnih aktivnosti učenici uspostavljaju veze između matematičkih

ideja, što im omogućuje da vide matematiku kao povezan sustav te primjene svoje znanje u različitim kontekstima. Izvlačenje apstraktnih matematičkih ideja iz konkretnih iskustava, kroz pažljivo postavljena pitanja, potiče učenike na kritičko razmišljanje i analizu obrazaca, čime se produbljuje razumijevanje matematičkih koncepata. Isto tako, traženje pojašnjenja i razrada odgovora omogućava učenicima da jasno izraze svoje razmišljanje i otklone eventualne nedoumice. Praktične aktivnosti, kao što su izrada okvira za fotografije ili mjerenje papira, pomažu učenicima da samostalno otkrivaju odnose između opsega i površine. Poteškoće s razlikovanjem opsega i površine utvrđene u istraživanjima ukazuju na potrebu za daljnjom podrškom i prilagođavanjem nastavnih metoda kako bi se osiguralo dubinsko razumijevanje ovih koncepata kod svih učenika (Winarti i sur., 2012).

# **METODOLOGIJA**

## **Istraživačka pitanja**

Koncepti opsega i površine su ključni koncepti u razrednoj nastavi matematike i temelj mnogim konceptima u drugim matematičkim područjima i svakodnevnom životu. S obzirom na to da učenici često nailaze na poteškoće pri usvajanju ovih koncepata, postavlja se pitanje je li to povezano s načinom na koji su ovi sadržaji predstavljeni i poučavani. Udžbenici, pružajući strukturiranu prezentaciju ključnih koncepata i metoda, imaju iznimnu ulogu u nastavi (Glasnović Gracin i Jukić Matić, 2016). Vrlo je važna raznolikost zadataka kojima će se ravnomjerno poticati razvoj različitih vještina, ali i motivirati učenike na aktivniji rad i napredak. Sukladno tome, udžbenici bi trebali ravnomjerno poticati razvoj svih komponenti matematičkih sposobnosti s ciljem olakšanja i kvalitetnijeg razumijevanja koncepata opsega i površine te svojstava koje vežemo uz njih. Cilj ovog diplomskog rada je istražiti kako udžbenici zadovoljavaju sve potrebe navedene u literaturi. U skladu s tim, postavljaju se sljedeća istraživačka pitanja:

1. Kako su udžbenici za razrednu nastavu matematike usklađeni s preporukama iz literature za poučavanje opsega i površine?
2. Kako zadaci iz udžbenika razredne nastave matematike potiču razvoj komponenti matematičke sposobnosti u kontekstu poučavanja opsega i površine?

## **Kvalitativna analiza udžbenika**

S obzirom na to da se istraživanje u ovom diplomskom radu temelji na podacima prikupljenim putem kvalitativne analize sadržaja matematičkih udžbenika, riječ je o empirijskom istraživanju (Katalenić i Kolar-Begović, 2022). Ključne faze u istraživanju su:

1. prikupljanje podataka i odabir jedinice analize,
2. definiranje kategorija za analizu sadržaja,
3. postupak kodiranja materijala,
4. analiza i prezentacija rezultata.

Ovo istraživanje temelji se na podacima prikupljenim iz tri najzastupljenija izdanja udžbenika za nastavu matematike od prvog do četvrtog razreda osnovne škole. Popis udžbenika uključenih u analizu dostupan je u Prilogu 1. Za potrebe istraživanja koristile su se oznake A

izdanje, B izdanje i C izdanje. Odabrane su sve udžbeničke jedinice iz navedenih udžbenika koje uključuju sadržaj iz područja opsega i površine. Tablica 1 sadrži abecedno navedene sadržaje prema razredima u kojima se obrađuju.

**Tablica 1 Popis udžbeničkih tema po razredima**

3. razred	4. razred
Mjerenje opsega Opseg geometrijskog lika Svaki lik ima opseg	Kako se mjeri površina? Koliko u kvadratnom metru ima kvadratnih decimetara? Mjerenje površine Mjerne jedinice za površinu Naučili smo: geometrija - 2. dio Ponavljanje Ponovimo Površina Površina pravokutnika i kvadrata Pravokutnik i kvadrat

U ovom istraživanju, jedinica analize predstavlja svaki zadatak unutar odabranih udžbeničkih jedinica. Priprema podataka za analizu uključivala je oblikovanje podatkovne matrice, u kojoj su u stupcima navedeni podaci o zadacima: udžbeničko izdanje, razred, nastavna jedinica, broj stranice i broj zadatka na stranici te kriteriji kodiranja zadataka opisani niže. Svaki redak u matrici odgovara jednoj jedinici analize, odnosno matematičkom zadatku koji je kodiran prema ranije utvrđenim kategorijama.

Kategorije prema kojima su se analizirane jedinice iz udžbenika određene su prema sadržajima iz pregleda literature, a to su faze razvijanja kompetencije mjerenja prema Cheesemanu i sur. (2014), svojstva mjerivih obilježja opsega i površine i komponente matematičke sposobnosti prema Kilpatricku (2009). Prva kategorija u koju su se svrstavali zadaci pripada fazama u razvijanju kompetencije mjerenje kako su opisane u pregledu literature. Svaki je zadatak posebno mogao biti kodiran prema jednom od sljedećih kriterija:

1. uspoređivanje veličina i opisno vrednovanje,
2. mjerenje nestandardnim mjernim jedinicama
3. mjerenje standardnim mjernim jedinicama
4. primjena
  - a. formule kad je zadan lik
  - b. formule kad su zadane duljine stranica lika,
  - c. formule kad je nepoznata duljina stranice lika

d. koncepta u svakodnevnom životu.

Zadaci su se svrstavali u kategoriji svojstva mjerivih obilježja opsega i površine s obzirom na to razmatraju li ijedno ili više svojstava i načela opisanih u pregledu literature, a to su načelo mjerenja, tranzitivnost, invarijantnost, aditivnost i monotonost.

U kategoriji matematičke sposobnosti zadaci su klasificirani s obzirom na to kojoj komponenti aktivnost u zadatku najviše doprinosi. U Tablici 2 je popis aktivnosti koje odgovaraju pojedinoj komponenti matematičke sposobnosti.

**Tablica 2 Popis komponenti matematičke sposobnosti i aktivnosti koje odgovaraju pojedinoj komponenti**

Konceptualno znanje	prepoznavanje definicije opsega i površine prepoznavanje obilježja opsega i površine razlikovanje mjernih jedinica za duljinu i površinu prepoznavanje veličine standardnih jediničnih kvadrata mjerenje površine lika u mreži popločavanjem jediničnim kvadratima crtanje lika u mreži kad je zadana površina
Proceduralno znanje	prepoznavanje mjernih jedinica i oznaka za njih preračunavanje mjernih jedinica računanje ukupne duljine stranica lika računanje opsega i površine koristeći formulu računanje duljine stranice lika kad je zadan opseg ili površina
Strateška kompetencija	primjena opsega i površine u kontekstu određivanje opsega i površine složenog lika crtanje lika zadanog opsega i površine crtanje pravokutnog trokuta zadane površine u mreži crtanje više likova zadane površine u zadanoj mreži
Prilagodljivo zaključivanje	odabir prikladne mjerne jedinice procjenjivanje opsega i površine u bilo kojem kontekstu zaključivanje o mjerenju jediničnim kvadratima različite veličine zaključivanje o odnosu mjernih jedinica za površinu zaključivanje o formuli za površinu pravokutniku zaključivanje o vezi opsega i površine
Produktivna dispozicija	prepoznavanje uloge i važnosti opsega i površine u svakodnevnom životu povezivanje opsega i površine s drugim pojmovima

U nekim zadacima zastupljeno je više komponenti matematičke sposobnosti, primjerice u sljedećem zadatku iz udžbenika C izdanja za 3. razred:

Prvo procijeni opseg, a zatim izmjeri duljine stranica i izračunaj opsege: a) naslovnice udžbenika matematike, b) školske klupe.

Navedeni zadatak doprinosi trima komponentama matematičkih sposobnosti. Razvija se proceduralno znanje kroz mjerenje duljina stranica lika i računanje opsega, strateška kompetencija zbog primjene u kontekstu i prilagodljivo zaključivanje koje povezujemo s procjenjivanjem opsega.

Postupak kodiranja uključuje kategorizaciju zadataka prema prethodno definiranim kategorijama iz znanstvene i stručne literature, čime se postiže visoka razina pouzdanosti i valjanosti u analizi sadržaja. Kvalitativna analiza sadržaja bila je osnovna metodologija istraživanja. Njome su prikupljeni podaci o kategorizaciji zadataka u udžbenicima. Analiza prikupljenih podataka provedena je pomoću deskriptivne statistike. Upotrijebljene su statističke mjere frekvencije i relativne frekvencije u tablicama i grafičkim prikazima kako bi se prikazala zastupljenost promatranih kategorija unutar udžbenika i po razredima.



## REZULTATI

### Opseg i površina u predmetnom kurikulumu i udžbenicima

Prema kurikulumu, učenici se prvi put susreću s pojmom opsega u 3. razredu osnovne škole kada ga uče kao mjerivo obilježje duljine ruba bilo kojeg geometrijskog lika te ga mjere raznim neformalnim i formalnim načinima. Učenici mjere duljinu dužine, određuju opseg trokuta, pravokutnika i kvadrata kao zbroj duljina svih stranica lika uz procjenu i objašnjavanje postupka. Važno je napomenuti da se u ovoj dobi ne očekuje da učenici formalno definiraju opseg, već da ga razumiju kao zbroj duljina stranica odgovarajućih likova što je prikladno jer je cilj intuitivno razvijanje koncepata temeljenih na prethodno stečenom znanju (Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole, 2019).

Kurikulumom je predviđeno da se učenici prvi put susreću s pojmom površine u 4. razredu osnovne škole kada je uče kao veličinu dijela ravne plohe koju je lik zauzeo. Osim što se susreću s pojmom površine, učenici uspoređuju različite likove temeljem ovog svojstva, mjere ju prebrojavanjem jediničnih kvadrata, ucrtavaju likove zadane površine u kvadratnu mrežu, upoznaju standardne mjere za površinu i mjere pravokutne površine u neposrednoj okolini. U ovoj se dobi i dalje ne očekuje od učenika da formalno definiraju površinu, već da je prepoznaju i uspoređuju na osnovu vizualnih elemenata (Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole, 2019).

Kurikulumom je ishodom „MAT OŠ D.1.1. Analizira i uspoređuje objekte iz okoline prema mjerivu svojstvu.” (Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole, 2019, str. 22) predviđeno da se učenici već u prvom razredu susretnu sa prepoznavanjem odnosa između predmeta, tj. koji je od predmeta veći/manji/jednak, dulji/kraći/jednako dug. To nam ukazuje na indirektnu povezanost s opsegom i površinom s obzirom na to da su to mjeriva obilježja, a uspoređivanje je prva faza pri usvajanju koncepata mjerenja. Idući ishod koji je preduvjet i indirektno postavlja temelje za opseg i površinu jest „MAT OŠ D.2.2. Procjenjuje, mjeri i crta dužine zadane duljine.” Preporuke vezane uz ovaj ishod se odnose na sve faze u razvijanju kompetencije mjerenja jer uključuju upotrebu nestandardnih i standardnih mjernih jedinica, odnosa među njima, pravilno mjerenje, crtanje, imenovanje i zapisivanje te procjenjivanje. Ishod „MAT OŠ D.3.3. Određuje opseg likova” odnosi se samo na opseg i to na mjerenje standardnim i nestandardnim mjernim jedinicama, određivanje opsega likova kao zbroja duljina njihovih stranica te procjenjivanje i

mjerenje opsega objašnjavajući postupak. Ishod „MAT OŠ D.4.2. Uspoređuje površine likova te ih mjeri jediničnim kvadratima” odnosi se samo na površinu i podrazumijeva uspoređivanje u ravnini i prema veličini dijela ravnine koju lik zauzima, ispravno korištenje i razumijevanje kvadratne mreže i jediničnih kvadrata u različitim kontekstima, poznavanje standardnih mjernih jedinica i njihovih odnosa te primjeni svega navedenog u neposrednoj okolini (Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole, 2019).

Preporuke iz kurikuluma za učenje opsega i površine dobro se poklapaju s ključnim točkama u poglavlju o učenju i poučavanju opsega i površine. Kurikulum naglašava postupno razvijanje kompetencija mjerenja kroz različite faze koje počinju od uspoređivanja objekata prema mjerivim svojstvima, preko mjerenja opsega i površine neformalnim metodama, do korištenja standardnih mjernih jedinica i instrumenata, a u konačnici i primjene formule u različitim okolnostima. Prema kurikulumu, učenici prvo uče intuitivno razumjeti opseg kao zbroj duljina stranica likova u trećem razredu, dok u četvrtom razredu uvode koncept površine kroz aktivnosti poput prebrojavanja jediničnih kvadrata. Preporuke u kurikulumu ističu važnost izgradnje konceptualnog znanja putem praktičnih aktivnosti i manipulativnih metoda prije uvođenja formalnih definicija i formula. Podržano je postupno uvođenje složenijih pojmova, što, u teoriji, učenicima omogućava razvoj dubokog razumijevanja ovih pojmova i njihove primjene u stvarnom životu.

Formalno, sadržaji o opsegu i površini obrađeni su kroz nekoliko udžbeničkih jedinica u trećem odnosno četvrtom razredu osnovne škole. U udžbenicima prvih dvaju razreda osnovne škole, oni se ne spominju izravno, no u vrlo maloj mjeri mogu se pronaći aktivnosti koje pripremaju učenike za razumijevanje ovih pojmova u kasnijim razredima. Na primjer, u lekcijama „veći-manji”, zadaci uspoređivanja veličina likova ili predmeta iz svakodnevnog života mogu se smatrati aktivnostima na fazi opisnog vrednovanja mjerivog obilježja. Učenici su kroz nastavne jedinice „dulji-kraći” pozvani da mjere i uspoređuju duljine različitih objekata, što je osnovni korak prema razumijevanju opsega. Od drugog razreda, u udžbenicima se pojavljuju mjerne jedinice i njihovo preračunavanje te se uvodi mjerenje duljine, nestandardnim i standardnim mjernim jedinicama. U istom razredu obrađuje se množenje koje se može vizualizirati pravokutnim pristupom. Na primjer, umnožak  $3 \cdot 4$  možemo prikazati kao pravokutnik sastavljen od jednakih kvadrata raspoređenih u 3 retka i 4 stupca. Umnožak faktora, u ovom slučaju 12, odgovara broju kvadrata unutar tog pravokutnika, što je početna

interpretacija površine. Na ovaj način, množenje se povezuje s upotrebom jediničnih kvadrata i razumijevanjem formule za površinu pravokutnika.

U trećem razredu, učenici se upoznaju s pojmom opsega kroz udžbeničke jedinice koje se fokusiraju na jednostavne oblike poput pravokutnika, kvadrata i trokuta. Učenike se potiče na obrublivanje ili mjerenje stranica likova i zbrajanje duljine kako bi dobili opseg. Kasnije uče kako koristiti formule za izračunavanje površine pravokutnika i kvadrata te upoznaju standardne mjerne jedinice za površinu, poput kvadratnog centimetra i kvadratnog metra. Česti su zadaci popločavanja jediničnim kvadratima u svrhu izračunavanja površine.

### Faze razvijanja kompetencije mjerenja i svojstva opsega i površine

Analizirano je ukupno 129 zadataka vezana uz opseg i površinu iz tri različita udžbenička kompleta za 3. i 4. razred osnovne škole. U Tablici 3 prikazana je zastupljenost zadataka prema kategorijama faza razvijanja kompetencije mjerenja.

**Tablica 3 Raspodjela zadataka iz udžbenika prema kategorijama faza razvijanja kompetencije mjerenja**

Izdanje udžbenika i razred	Kategorije faza razvijanja kompetencije mjerenja						
	1	2	3	4.a	4.b	4.c	4.d
A izdanje 3. razred		7.14%	14.29%	28.57%	14.29%	7.14%	28.57%
A izdanje 4. razred	8.20%	21.31%	40.98%	4.92%	8.20%	11.48%	4.92%
B izdanje 3. razred				40.00%	60.00%		
B izdanje 4. razred		80.00%	20.00%				
C izdanje 3. razred				90.91%	9.09%		
C izdanje 4. razred		14.29%	67.86%	3.57%	3.57%	3.57%	7.14%
Sveukupno	3.88%	20.16%	37.21%	15.50%	9.30%	6.98%	6.98%

Iako bi, prema literaturi, kategorija 1 – uspoređivanje veličina trebala biti početna faza u razvoju mjerenja, koja predstavlja temelj za razvijanje svjesnosti o mjerivim obilježjima, njena zastupljenost u udžbenicima za 3. i 4. razred izuzetno je niska. Ova kategorija se gotovo uopće ne pojavljuje u promatranim udžbenicima, osim u A izdanja za 4. razred, gdje je prisutno samo pet zadataka ove vrste.

U udžbenicima za treći razred, prilikom poučavanja opsega, većina zadataka svrstana je u kategoriju 4, koja se odnosi na primjenu formule (Slika 5.C-F). Izuzetak predstavlja udžbenik A izdanja za 3. razred, koji jedini nudi zadatke iz različitih kategorija. U njemu se, iako u manjoj mjeri, nalaze zadaci iz 2. i 3. kategorije, koji obuhvaćaju rad s nestandardnim i standardnim mjernim jedinicama, kao i četiri zadatka koji se odnose na primjenu opsega u svakodnevnom životu. Udžbenici za četvrti razred pokazuju značajne varijacije u pogledu sadržaja i distribucije zadataka po kategorijama. Udžbenik A izdanja za 4. razred jedini je udžbenik koji sadrži veći broj zadataka ravnomjerno raspoređenih po svim kategorijama, s time da je kategorija 3, koja

se odnosi na mjerenje standardnim mjernim jedinicama, najzastupljenija, kako u ovom udžbeniku, tako i općenito. Nasuprot tome, udžbenik B izdanja za 4. razred ima zadatke isključivo u kategorijama 2 i 3 koje se odnose na mjerenje nestandardnim i standardnim mjernim jedinicama. To su zadaci određivanja opsega i površine ili crtanja likova zadanih opsega i površine u kvadratnoj mreži (Slika 5.A-B). Udžbenik C izdanja za 4. razred obuhvaća zadatke iz svih kategorija, osim iz prve kategorije, koja se odnosi na uspoređivanje veličina.

1. Jediničnim kvadratom duljine stranica 1 cm izmjeri površinu likova i izračunaj njihov opseg.

$P = \underline{\hspace{2cm}}$  jedinična kvadrata     $P = \underline{\hspace{2cm}}$  jedinična kvadrata     $P = \underline{\hspace{2cm}}$  jedinična kvadrata  
 $o = \underline{\hspace{2cm}}$      $o = \underline{\hspace{2cm}}$      $o = \underline{\hspace{2cm}}$

Usporedi površine i opsege likova. Što zaključuješ?

A. Primjer za kategoriju 2 – mjerenje nestandardnim mjernim jedinicama, B izdanje 4. razred

1. U kvadratnu mrežu nacrtaj pravokutnik duljina stranica 5 cm i 4 cm.

Najprije prebroji koliko jediničnih kvadrata od  $1\text{ cm}^2$  zauzima pravokutnik.  
 $P = \underline{\hspace{2cm}}$

Zatim izračunaj njegovu površinu tako da pomnožiš duljine njegovih stranica.  
 $P = 5\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = \underline{\hspace{2cm}}$

B. Primjer za kategoriju 3 – mjerenje standardnim mjernim jedinicama, B izdanje 4. razred

1. Procijeni opseg trokuta, a zatim mjerenjem i računanjem provjeri svoju procjenu.

stranica	duljina
AB	
BC	
AC	

Procjena opsega:  $o = \underline{\hspace{2cm}}$      $o = \underline{\hspace{2cm}}$   
 Račun:  $\underline{\hspace{2cm}}$      $o = \underline{\hspace{2cm}}$

C. Primjer za kategoriju 4.a – primjena formule kad je zadan lik, B izdanje 3. razred

3. Stranice pravokutnika su 5 cm i 3 cm. Izračunaj opseg pravokutnika, a zatim ga izmjeri koncem.

Račun:  $\underline{\hspace{2cm}}$      $o = \underline{\hspace{2cm}}$

Rezultat mjerenja koncem:  $\underline{\hspace{2cm}}$

D. Primjer za kategoriju 4.b – primjena formule kad su zadane duljine stranica lika, B izdanje 3. razred

4. Kvadrat ima opseg 20 cm. Kolika je duljina stranice tog kvadrata? Nacrtaj taj kvadrat.

Možeš li bez crtanja i mjerenja izračunati duljinu stranice?

E. Primjer za kategoriju 4.c – primjena formule kad je nepoznata duljina stranice lika, B izdanje 3. razred

4. Pogledaj sliku. Zemljište trokutastog oblika treba ograditi kako životinje ne bi odlutale. Koliko je metara ograde potrebno za ograđivanje?

Opseg trokuta.

Račun:  $10\text{ m} + 10\text{ m} + 8\text{ m} = \underline{\hspace{2cm}}$      $o = \underline{\hspace{2cm}}\text{ m}$   
 Odgovor:  $\underline{\hspace{2cm}}$

F. Primjer za kategoriju 4.d – primjena u svakodnevnom životu, A izdanje 3. razred

**Slika 5 Primjeri zadataka različitih kategorija prema kriteriju faza razvijanja kompetencije mjerenja**

Udžbenički setovi za treći razred, općenito gledajući, uglavnom ne sadrže zadatke koji potiču razvoj svojstava opsega i površine (Tablica 4). Zadaci su uglavnom usmjereni na računanje opsega kada je zadan lik ili duljina stranica. Izuzetak predstavlja udžbenik C izdanja za 3. razred, koji jedini uključuje zadatke usmjerene na neko od svojstava, i to aditivnost.

Primjerice, u zadatku na Slici 6.A treba prepoznati da opseg složenog lika nije jednak zbroju opsega njegovih dijelova, koji su poznati geometrijski likovi, nego ga izračunati kao zbroj duljina stranica lika.

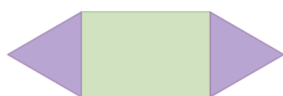
**Tablica 4 Zastupljenost zadataka u udžbenicima koji podržavaju svojstva opsega i površine**

Izdanje udžbenika i razred	Svojstva opsega i površine			
	Aditivnost	Invarijantnost	Monotonost	Tranzitivnost
A izdanje 4. razred	1	5	1	4
B izdanje 4. razred		6		
C izdanje 3. razred	2			
C izdanje 4. razred	1	1		

U udžbeniku B izdanja za 4. razred prisutno je samo svojstvo invarijantnosti. Zadaci su pronalaženje više različitih likova iste površine; zaključivanje da likovi sastavljeni od istih dijelova imaju jednaku površinu (Slika 6.C) i da različiti likovi iste površine mogu imati različite opsege. U udžbeniku C izdanja za 4. razred nalazi se po jedan zadatak vezan uz svojstva aditivnosti i invarijantnosti. Prvi je zadatak utvrditi da je zbroj površina svih jediničnih kvadrata koji prekrivaju lik jednak ukupnoj površini tog lika, a drugi je zadatak crtanje više različitih likova iste površine i zaključivanja da takvi likovi mogu imati različite opsege.

Općenito govoreći, najveći broj zadataka usmjerenih na svojstva opsega i površine sadrži udžbenik A izdanja za 4. razred, koji je ujedno i jedini udžbenik u kojem su, iako u maloj mjeri, među zadacima zastupljena sva svojstva. U zadatku na Slici 6.B potrebno je interpretirati pravokutni trokut kao dio pravokutnika dvostruko veće površine. U zadatku na Slici 6.D likovi se uspoređuju i redaju po veličini s obzirom na njihovu površinu kao broj jediničnih kvadrata koji ih popločavaju.

5. Izmjeri duljine stranica nacrtanoga lika i izračunaj njegov opseg.



A. Primjer za svojstvo aditivnosti, C izdanje 3. razred

3. U kvadratnoj mreži nacrtaj jednakokračni pravokutni trokut tako da mu površina bude 8 jediničnih kvadrata.

B. Primjer za svojstvo monotonosti, A izdanje 4. r.

2. Ivan želi saznati koji pravokutnik ima veću površinu. Pogledaj kako se snašao i objasni njegovu ideju.

Prvi pravokutnik prekrili smo sa \_\_\_\_ kvadrata.  
 Drugi pravokutnik prekrili smo sa \_\_\_\_ kvadrata.  
 Što možeš reći o površinama ovih dvaju pravokutnika?

C. Primjer za svojstvo invarijantnosti, A izdanje 4. r.

5. Odredi površine plavih likova. Dodijeli im redne brojeve tako da prvi ima najmanju površinu.

Površina ovog lika je \_\_\_\_ jediničnih kvadrata.      Površina ovog lika je \_\_\_\_ jediničnih kvadrata.      Površina ovog lika je \_\_\_\_ jediničnih kvadrata.

D. Primjer za svojstvo tranzitivnosti, A izdanje 4. r.

**Slika 6 Primjeri zadataka iz udžbenika iz različitih kategorija prema kriteriju svojstava**

## **Komponente matematičke sposobnosti u zadacima vezanima uz opseg i površinu**

U Tablici 5 prikazana je zastupljenost zadataka u udžbenicima za razrednu nastavu matematike s obzirom na komponente matematičke sposobnosti, u kontekstu poučavanja opsega i površine. Ako je određeni zadatak obuhvaćao više komponenti matematičke sposobnosti svaka komponenta je evidentirana u zastupljenosti.

Tablica 5 prikazuje broj zadataka u tri izdanja udžbenika za 3. i 4. razred osnovne škole, raspoređenih po komponentama matematičke sposobnosti. Utvrđeno je da se u A izdanju udžbenika za 3. razred najveći naglasak stavlja na proceduralno znanje. Udio preostalih komponenti značajno je manji, a produktivnoj dispoziciji nije posvećen niti jedan zadatak. Navedeno sugerira da su se autori fokusirali na razvoj proceduralnih vještina kod mlađih učenika dok su neke od komponenti gotovo zanemarene. Isto izdanje udžbenika za 4. razred sadrži značajno veći broj zadataka s uravnoteženom distribucijom kroz sve komponente, osim produktivne dispozicije. Udžbenik A izdanja ima jasnu progresiju u složenosti i raspršenosti zadataka između 3. i 4. razreda.

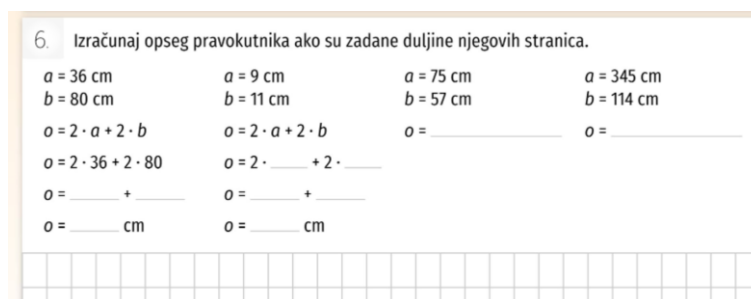
B izdanje ima vrlo skroman broj zadataka u oba razreda, što sugerira ograničenu mogućnost za razvijanje šireg spektra matematičkih sposobnosti. U 3. se razredu pojavljuju zadaci vezani uz proceduralno znanje, stratešku kompetenciju i prilagodljivo zaključivanje, dok su preostale dvije komponente izostavljene. U četvrtom se razredu pojavljuje duplo veći broj zadataka i time je omogućena bolja distribucija po komponentama, no produktivna dispozicija je i ovaj put izostavljena. U ovom udžbeniku naglasak nije na proceduralnom znanju nego se potiče razvoj preostalih komponenti, s naglaskom na prilagodljivo zaključivanje. Najveći se promjena iz 3. u 4. razred očituje u povećanju zadataka prilagodljivog zaključivanja i uključivanju zadataka s konceptualnim znanjem.

Kao i A izdanje, C izdanje za 3. razred pokazuje veliku usmjerenost na proceduralno znanje koje je obuhvaćeno u 10 od 11 zadataka. Ovaj fokus na rutinske vještine u ranim fazama obrazovanja može biti očekivan, ali i ovdje su komponente poput konceptualnog znanja i produktivne dispozicije potpuno zanemarene, što ukazuje na sličan pristup kao u B izdanju. U izdanju za 4. razred povećava se raznolikost zadataka, no proceduralno znanje je i dalje najnaglašenije. Konceptualno znanje je druga najzastupljenija komponenta. Preostale komponente su zastupljene u manjoj mjeri, što može značiti da se u ovom izdanju stavlja nešto manji naglasak na kreativno rješavanje problema. I u ovom se izdanju raspodjela po komponentama mijenja pri prelasku iz 3. u 4. razred.

**Tablica 5 Broj zadataka u udžbenicima po različitim komponentama matematičke sposobnosti**

Izdanje udžbenika i razred	Broj zadataka s pojedinom komponentom matematičke sposobnosti					Ukupno
	Konceptualno znanje	Proceduralno znanje	Strateška kompetencija	Prilagodljivo zaključivanje	Produktivna dispozicija	
A izdanje 3. razred	1	9	5	3	0	14
A izdanje 4. razred	19	18	15	19	4	61
B izdanje 3. razred	0	3	2	2	0	5
B izdanje 4. razred	2	1	3	7	0	10
C izdanje 3. razred	0	10	3	3	0	11
C izdanje 4. razred	9	15	2	4	2	28
Ukupno	31	56	30	38	6	129

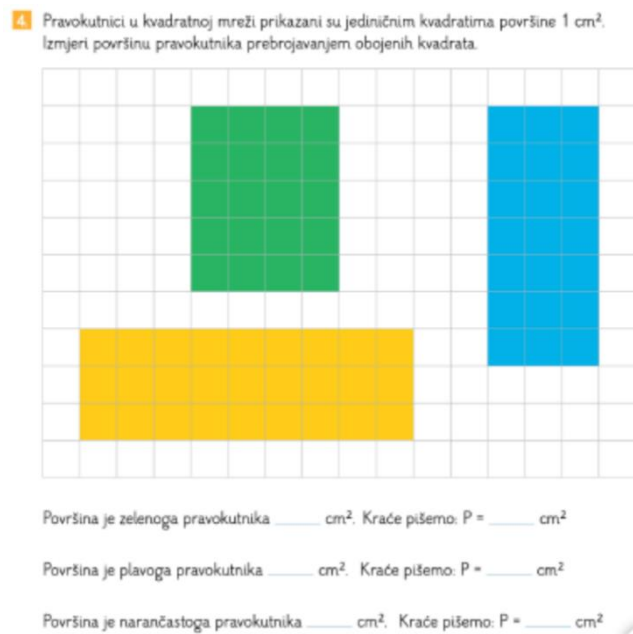
Analiza zadataka, s obzirom na komponente matematičke sposobnosti, pokazala je neujednačen naglasak na različitim komponentama, što je u suprotnosti s preporukama stručne literature. Iako je razvoj svih pet komponenti od ključne važnosti za uspješno ovladavanje matematikom, rezultati analize ukazuju na prevladavajući fokus na proceduralno znanje (43.41%). Naglasak je na vještinama računanja i izvođenja procedura, kao u zadatku na Slici 7. Zadaci koji odgovaraju komponenti proceduralnog znanja su vezani uz primjenu formule kad je zadan lik ili upotrebu standardnih mjernih jedinica.



**Slika 7 Primjer zadatka za komponentu proceduralnog znanja, A izdanje 4. razred**

S druge strane, konceptualno znanje, koje je temelj za razumijevanje matematičkih pojmova i njihovih međusobnih veza, zastupljeno je u 24.03% zadataka. U većini udžbenika za 3. razred ova komponenta gotovo je potpuno zanemarena. U analizi je pronađen samo jedan zadatak koji potiče razvoj konceptualnog znanja u udžbeniku A izdanja za 3. razred, a odnosi se na prepoznavanje definicije opsega. Većina zadataka koji potiču konceptualno znanje su tipa nacrtati lik zadane površine u mreži ili mjeriti površinu zadanog lika u mreži kao na Slici 8.

Manje su zastupljeni zadaci koji zahtijevaju prepoznavanje definicije i obilježja opsega i površine.



**Slika 8** Primjer zadatka za komponentu konceptualnog znanja, C izdanje 4. razred

Strateška kompetencija može se pronaći u 23.25% zadataka, a najčešće su to zadaci tipa crtanja više likova zadane površine u mreži, primjena opsega i površine u kontekstu ili određivanje opsega i površine složenog ili nestandardnog lika, kao na Slici 9. Manje zastupljeni zadaci kojima se razvija strateška kompetencija uključuju crtanje lika zadanog opsega i površine ili crtanje trokuta zadane površine u mreži.





**Slika 9** Primjer zadatka za komponentu strateške kompetencije, A izdanje 4. razred

Komponenta prilagodljivog zaključivanja može se pronaći u 26.36% zadataka, a najčešće su to zadaci tipa procijeniti opseg i površinu, odabrati prikladnu mjernu jedinicu ili zaključivati o vezi opsega i površine, kao na Slici 10. Manje zastupljeni zadaci kojima se razvija strateška kompetencija se odnose na zaključivanje o formuli za površinu pravokutnika ili na zaključivanje o odnosu mjernih jedinica.



1. Jediničnim kvadratom duljine stranica 1 cm izmjeri površinu likova i izračunaj njihov opseg.

		
$P = \underline{\hspace{1cm}}$ jedinična kvadrata	$P = \underline{\hspace{1cm}}$ jedinična kvadrata	$P = \underline{\hspace{1cm}}$ jedinična kvadrata
$o = \underline{\hspace{1cm}}$	$o = \underline{\hspace{1cm}}$	$o = \underline{\hspace{1cm}}$

Usporedi površine i opsege likova. Što zaključuješ?

**Slika 10** Primjer zadatka za komponentu prilagodljivog zaključivanja, B izdanje 4. razred

Komponenta produktivne dispozicije, odnosno pozitivnog stava prema matematici, gotovo se uopće ne razvija u analiziranim udžbenicima jer je zastupljena je u svega 4.65% analiziranih zadataka. Izuzetak predstavljaju udžbenici B izdanja za 4. razred i C izdanja za 4. razred. Oni uključuju zadatke kojima se razvija svijest o ulozi i važnosti opsega i površine u svakodnevnom životu, kao na Slici 11, ili se opseg i površina povezuju s drugim pojmovima.

9. Napiši u kojim se životnim situacijama treba primijeniti znanje o mjerenju površina.

---

---

---

---

---

---

---

**Slika 11** Primjer zadatka za komponentu produktivne dispozicije, C izdanje 4. razred

## RASPRAVA

Iako postojeći kurikulum prepoznaje važnost cjelovitog razvijanja koncepata opsega i površine, postoji prostor za daljnje unapređenje sadržaja udžbenika. Ranije uvođenje ovih koncepata, već u nižim razredima osnovne škole, omogućilo bi učenicima da postupno grade svoje razumijevanje, čime bi se značajno unaprijedio njihov uspjeh u kasnijim fazama obrazovanja. Prikladne aktivnosti koje pripremaju učenike za usvajanje koncepata opsega i površine, poput obrublivanja, popločavanja, preslagivanja, aktivnosti s tangramom i slično, mogu se primijeniti već od početka školovanja, čime se izbjegava nagli prijelaz i poteškoće s kojima se često susreću u trećem i četvrtom razredu kada se ti pojmovi uvode. Ovaj pristup podrazumijeva intuitivno upoznavanje učenika s konceptima, bez formalnog imenovanja i definiranja. Kurikulum bi se na taj način bolje uskladio s preporukama za učenje i poučavanje opsega i površine koje se pronalaze u literaturi.

Na temelju provedenih analiza, može se zaključiti da udžbenici za razrednu nastavu matematike pokazuju značajne nedostatke u usklađenosti s navedenim preporukama. Prema literaturi, poučavanje opsega i površine treba se odvijati kroz nekoliko faza koje uključuju razvoj svijesti o mjerivim obilježjima, primjenu nestandardnih i standardnih mjernih jedinica, te na kraju, ispravnu primjenu formula i primjenu u stvarnom životu. Većina zadataka u udžbenicima usmjerena je na kasnije faze poučavanja, posebno na primjenu standardnih mjernih jedinica i formula, što može dovesti do mehaničkog učenja bez dubljeg razumijevanja osnovnih matematičkih koncepata. Rane faze gotovo potpuno su zanemarene iako bi trebale biti osnova za daljnje razumijevanje koncepta. Mjerenje nestandardnim i standardnim mjernim jedinicama je ključna faza u razumijevanju mjerivog obilježja, jer omogućuje učenicima da postupno razvijaju svoje kompetencije kroz iskustveno učenje. Bez dobrih temelja u mjerenju, učenici mogu imati poteškoća u razumijevanju koncepata opsega i površine. Upravo je zato posebno važno ove pojmove uvoditi u kurikulum postupno i promišljeno. Za razumijevanje koncepta, ključno je pratiti prirodan slijed faza i ne prelaziti na sljedeću fazu dok učenici u potpunosti ne savladaju prethodnu. Primjena u stvarnim situacijama potiče dublje razumijevanje i dugoročno zadržavanje znanja. Uz to, praktične aktivnosti razvijaju kreativnost, kritičko mišljenje i sposobnost rješavanja problema, čineći učenje interaktivnijim i motivirajućim. Uključivanjem većeg broja aktivnosti u nastavu, učenici razvijaju sposobnosti promatranja, analize i zaključivanja, što su ključne kompetencije u matematici i drugim područjima života.

S obzirom na to da analiza ukazuje na neravnomjernu zastupljenost različitih komponenti matematičke sposobnosti u udžbenicima za razrednu nastavu, ključna preporuka za poboljšanje je poticati ravnomjerniji razvoj. Potrebno je osigurati da udžbenici sadrže uravnotežen omjer zadataka koji potiču ne samo proceduralno znanje, već i konceptualno razumijevanje, stratešku kompetenciju, prilagodljivo zaključivanje te produktivnu dispoziciju. Važno je povećati broj zadataka i aktivnosti koji potiču duboko razumijevanje matematičkih pojmova. Udžbenici bi trebali sadržavati zadatke koji učenicima omogućuju da istražuju i razumiju odnose između različitih matematičkih koncepata, posebno prilikom uvođenja pojmova poput opsega i površine. Primjeri zadataka koji kombiniraju praktičnu primjenu s teorijskim razumijevanjem mogu značajno doprinijeti razvoju konceptualnog znanja. Kako bi se potaknulo razvijanje pozitivnog stava prema matematici i samopouzdanja u matematičke sposobnosti, udžbenici bi trebali uključivati više zadataka i aktivnosti koje su povezane s realnim životnim situacijama i izazovima. Aktivnosti koje su interaktivne i kreativne, a istovremeno relevantne za svakodnevni život i bliske učenicima, pomažu u razvijanju ljubavi i pozitivnog stava prema matematici. Posebno je važno da time raste i uvjerenje da su sposobni uspješno rješavati matematičke probleme. Isto tako, udžbenici bi trebali sadržavati zadatke koji zahtijevaju od njih više od same primjene naučenih postupaka - da procjenjuju, prilagođavaju i biraju odgovarajuće strategije za rješavanje problema. Ovi zadaci mogu uključivati matematičke probleme koji zahtijevaju strateško i prilagodljivo razmišljanje te integraciju više matematičkih pojmova. Aktivnosti se mogu provoditi u školi i izvan nje, a kada uključuju mjerenje, procjenjivanje i analizu u stvarnom okruženju, omogućuju učenicima da stečeno znanje nauče primijeniti u različitim kontekstima, što rezultira dubljim i trajnijim razumijevanjem matematičkih pojmova.

Kada proučimo zadatke iz udžbenika iz perspektive svojstava opsega i površine, postaje očito da trenutna praksa i ovdje pokazuje značajne nedostatke. Svojstva opsega i površine su najmanje zastupljena među svim analiziranim aspektima, što dodatno naglašava potrebu za poboljšanjima. Zadaci koji potiču razumijevanje i primjenu svojstava monotonosti, aditivnosti, invarijantnosti i tranzitivnosti uglavnom nedostaju. Kako bi se ovi nedostaci ispravili, važno je ravnomjerno integrirati različita svojstva. Uvođenjem zadataka fokusiranih na razvoj svojstava, omogućava se dublje razumijevanje i izbjegava se mehaničko učenje koje se često javlja kada se fokusira samo na primjenu formula. U udžbenicima bi se trebali češće pojavljivati i problemski zadaci koji često potiču učenike na istraživanje različitih svojstava mjerenja. Oni

pomažu učenicima da razviju sposobnost primjene teorijskih znanja na kompleksnije probleme, počevši od osnovnih procjena i usporedba, preko primjene nestandardnih mjernih jedinica, pa sve do točne primjene standardnih formula. U konačnici, češće bi trebali biti prisutni zadaci koji zahtijevaju od učenika da istražuju i donose zaključke na temelju svojih opažanja. Ovi zadaci ne samo da razvijaju kritičko mišljenje, već i omogućuju učenicima da eksperimentiraju s različitim svojstvima mjerenja i razumiju kako svojstva utječu na rezultate.

Primjenom ovih preporuka u udžbenicima za razrednu nastavu matematike osigurat će se razvoj svih ključnih aspekata matematičkih sposobnosti i razumijevanje svojstava, pružajući učenicima čvrste temelje za razumijevanje koncepata opsega i površine i pripremajući ih za složenije matematičke izazove u budućem obrazovanju.

## ZAKLJUČAK

Ovaj je diplomski rad usmjeren na analizu zastupljenosti zadataka vezanih uz koncepte opsega i površine u udžbenicima za razrednu nastavu matematike. Cilj je bio utvrditi u kojoj mjeri postojeći udžbenici omogućuju razvoj ključnih matematičkih sposobnosti, svojstava i faza razvijanja kompetencija mjerenja u zadacima iz područja opsega i površine. Rezultati istraživanja pokazali su da udžbenici često zanemaruju rane faze učenja, koje su ključne za razvoj čvrstih temelja u konceptima opsega i površine. Pritom je primijećeno da su zadaci koji pokrivaju različita svojstva opsega i površine nedovoljno zastupljena. Analizirani udžbenici pokazuju različite pristupe: dok neki nude raznolike aktivnosti koje potiču dublje razumijevanje i kreativnost, drugi su usmjereni na pružanje osnovnog znanja koje može biti korisno za stjecanje čvrstih temelja. Odabir udžbenika trebao bi biti usklađen s obrazovnim ciljevima – ako je prioritet osigurati temeljito razumijevanje osnovnih koncepata, određeni udžbenici mogu biti prikladniji, dok za razvoj dubljeg razumijevanja i kreativnih sposobnosti mogu biti korisniji drugi. U svakom slučaju, niti jedan udžbenik ne pruža odgovarajuću podršku na svim razinama i potrebno je fokusirati se na poboljšanje.

Za unapređenje nastavnih materijala, važno je uključiti raznolike zadatke koji potiču razvoj svih ključnih segmenata potrebnih za razumijevanje koncepata. Raznoliki zadaci ne samo da omogućuju učenicima razvoj različitih vještina, već i održavaju njihovu motivaciju i interes za matematičke aktivnosti. Zadaci bi trebali biti jasni, izazovni, i ujedno omogućiti kreativnost u pronalaženju rješenja.

Imajući na umu sve navedeno, preporučuje se redovita evaluacija udžbenika radi osiguravanja ravnoteže između različitih komponenti matematičke sposobnosti. Uz postojeće udžbenike preporučljivo je uvođenje dodatnih izvora i materijala koji podržavaju razvoj onih dijelova koje su manje zastupljeni kako bi se postigao uravnoteženi pristup poučavanja matematike. Ova analiza i preporuke doprinose razumijevanju kako unaprijediti nastavni sadržaj i metode kako bi se postigli bolji obrazovni rezultati u matematici.

## POPIS LITERATURE

1. Cheeseman, J., McDonough, A., Ferguson, S. (2014). Investigating young children's learning of mass measurement. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 131–150.
2. Fiangga, S. (2014). Tangram game activities, helping the students difficulty in understanding the concept of area conservation paper title. *Proceedings of International conference on research, implementation and education of mathematics and sciences*, pp. 453-460. Faculty of Mathematics and Natural Sciences Yogyakarta State University.
3. Glasnović Gracin, D. (2014). Matematički udžbenik kao predmet istraživanja. *Croatian Journal of Education: Hrvatski Časopis za Odgoj i Obrazovanje*, 16(3), 211-237.
4. Glasnović Gracin, D., Jukić Matić, L. (2016). The role of mathematics textbooks in lower secondary education in Croatia: An empirical study. *The Mathematics Educator*, 16(2), 31–58.
5. Haris, D., Ilma, R. (2011). The role of context in third graders' learning of area measurement. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, 2(1), 55-66.
6. Horvat Dmitrović, L., Žgaljić Keko, A. (2019). Poučavanje usmjereno na usvajanje matematičkih pojmova i koncepata. *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 20(78), 49-62.
7. Igaly, G. (Ur.) (2015). *Hrvatsko matematičko nazivlje*. Institut za hrvatski jezik i jezikoslovlje.
8. Jukić Matić, Lj., Matić, I. (2017). *Priručnik za nastavu matematike*. Odjel za matematiku.
9. Katalenić, A., Kolar-Begović, Z. (2022). Prospective primary school teachers' work in continuous online assessments in the course of didactics of mathematics. *Mathematics Teaching Research Journal*, 14(4), 80–105.
10. Kilpatrick, J. (2009). The mathematics teacher and curriculum change. *PNA*, 3(3), 107-121.
11. *Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2.* (2019). Ministarstvo znanosti i obrazovanja.
12. Liebeck, P. (1995). *Kako djeca uče matematiku*. Educa.
13. Pavković, B., Veljan, D. (2004). *Elementarna Matematika 1*. Školska knjiga.

14. Pavleković, M. (2009). *Matematika i nadareni učenici. Razvoj kurikula na učiteljskim studijima za prepoznavanje, izobrazbu i podršku darovitih učenika*. Element.
15. Suh, J. M. (2007). Tying it all together: Classroom practices that promote mathematical proficiency for all students. *Teaching children mathematics*, 14(3), 163-169.
16. Van de Walle, J. A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M. (2016). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (9. izd.). Pearson.
17. Winarti, D. W., Amin, S. M., Lukito, A., Van Gallen, F. (2012). Learning the concept of area and perimeter by exploring their relation. *Journal on Mathematics Education*, 3(1), 41-54.
18. Yuberta, K. R., Hartono, Y., Van Galen, F. (2011). Developing student's notion of measurement unit for area. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, 2(2), 173-184.
19. *Zakon o udžbenicima i drugim obrazovnim materijalima za osnovnu i srednju školu NN 116/2018* (2018). Dostupno 30. 8. 2024. na [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2018\\_12\\_116\\_2288.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2018_12_116_2288.html)

# Prilog 1

## Popis analiziranih udžbenika

1. Glasnović Gracin, D., Žokalj, G., Soucie, T. (2019). *Otkrivamo matematiku 1, prvi dio, radni udžbenik iz matematike za prvi razred osnovne škole*. ALFA. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://hr.mozaweb.com/hr/mblite.php?cmd=open&bid=HR-ALFA-MAT1-0037&page=2>
2. Glasnović Gracin, D., Žokalj, G., Soucie, T. (2019). *Otkrivamo matematiku 1, drugi dio, radni udžbenik iz matematike za prvi razred osnovne škole*. ALFA. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://hr.mozaweb.com/hr/mblite.php?cmd=open&bid=HR-ALFA-MAT1-0044&page=1>
3. Glasnović Gracin, D., Žokalj, G., Soucie, T. (2020). *Otkrivamo matematiku 2, radni udžbenik iz matematike za drugi razred osnovne škole*. ALFA. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://hr.mozaweb.com/hr/mblite.php?cmd=open&bid=HR-ALFA-MAT2-1591&page=3>
4. Glasnović Gracin, D., Žokalj, G., Soucie, T. (2020). *Otkrivamo matematiku 3, radni udžbenik iz matematike za treći razred osnovne škole*. ALFA. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://hr.mozaweb.com/hr/mblite.php?cmd=open&bid=HR-ALFA-MAT3-1843&page=1>
5. Glasnović Gracin, D., Žokalj, G., Soucie, T. (2021). *Otkrivamo matematiku 4, radni udžbenik iz matematike za četvrti razred osnovne škole*. ALFA. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://hr.mozaweb.com/hr/mblite.php?cmd=open&bid=HR-ALFA-MAT4-3229&page=2>
6. Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2023). *Moj sretni broj 1, udžbenik matematike u 1. razredu osnovne škole*. Školska knjiga. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://www.e-sfera.hr/prelistaj-udzbenik/fea171dd-7f4f-46f1-b7c9-ab40d504b4b1>
7. Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2020). *Moj sretni broj 2, udžbenik matematike s dodatnim digitalnim sadržajima u drugom razredu osnovne škole*. Školska knjiga. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://www.e-sfera.hr/prelistaj-udzbenik/33dd561b-c57f-41cc-82d2-67dad9ea20a2>



8. Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2020). *Moj sretni broj 3, udžbenik matematike s dodatnim digitalnim sadržajima u trećem razredu osnovne škole*. Školska knjiga. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://www.e-sfera.hr/prelistaj-udzbenik/a919b228-c4b8-4adc-af5c-c5c30905c990>
9. Jakovljević Rogić, S., Miklec, D., Prtajin, G. (2021). *Moj sretni broj 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole*. Školska knjiga. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://www.e-sfera.hr/prelistaj-udzbenik/187787b6-9db2-4813-8932-2b9da5ee9846>
10. Martić, M., Ivančić, G., Kuvačić Roje, L., Sarajčev, E., Tkalčec, D. (2023). *Super matematika za prave tragače 1, radni udžbenik za 1. razred osnovne škole, 1. dio*. Profil Klett. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://hr.izzi.digital/DOS/554132/554135.html>
11. Martić, M., Ivančić, G., Kuvačić Roje, L., Sarajčev, E., Tkalčec, D. (2023). *Super matematika za prave tragače 1, radni udžbenik za 1. razred osnovne škole, 2. dio*. Profil Klett. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://hr.izzi.digital/DOS/796016/836017.html>
12. Martić, M., Ivančić, G., Čupić, A., Martinić Cezar, J., Brničević Stanić, M. (2022). *Super matematika za prave tragače 2, radni udžbenik za 2. razred osnovne škole, 1. dio*. Profil Klett. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://hr.izzi.digital/DOS/626017/626018.html?page=2&centrespread=1>
13. Martić, M., Ivančić, G., Čupić, A., Martinić Cezar, J., Brničević Stanić, M. (2022). *Super matematika za prave tragače 2, radni udžbenik za 2. razred osnovne škole, 2. dio*. Profil Klett. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://hr.izzi.digital/DOS/799737/799739.html>
14. Martić, M., Ivančić, Kuvačić Roje, L., Tkalčec D., Lažeta, Ž. (2023). *Super matematika za prave tragače, radni udžbenik za 3. razred osnovne škole, 1. dio*. Profil Klett. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://hr.izzi.digital/DOS/635346/635369.html?page=2&centrespread=1>
15. Martić, M., Ivančić, Kuvačić Roje, L., Tkalčec D., Lažeta, Ž. (2023). *Super matematika za prave tragače 3, radni udžbenik za 3. razred osnovne škole, 2. dio*. Profil Klett. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://hr.izzi.digital/DOS/804650/804653.html?page=2&centrespread=1>

16. Martić, M., Ivančić, G., Dunatov, J., Brničević Stanić, M., Martinić Cezar, J. (2023). *Super matematika za prave tragače, radni udžbenik za 4. razred osnovne škole, 1. dio*. Profil Klett. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://hr.izzi.digital/DOS/735639/735656.html>
17. Martić, M., Ivančić, G., Dunatov, J., Brničević Stanić, M., Martinić Cezar, J. (2023). *Super matematika za prave tragače, radni udžbenik za 4. razred osnovne škole, 2. dio*. Profil Klett. Dostupno 29. lipnja 2024. na: <https://hr.izzi.digital/DOS/805259/805265.html>



31000 Osijek, Ulica cara Hadrijana 10 +385 31 321 700 • helpdesk@foozos.hr • www.foozos.hr

OIB: 28082679513 • MB: 1404881 • IBAN: HR0823600001103081122

Student/ica: Sara Kostecki

Studijski program: Sveučilišni integrirani prijediplomski i diplomski Učiteljski studij

JMBAG: 0267042537

### IZJAVA O SAMOSTALNOJ IZRADI ZAVRŠNOG/DIPLOMSKOG RADA

kojom izjavljujem da sam završni/diplomski rad pod naslovom

Razvijanje koncepata opsega i površine u razrednoj nastavi matematike

*(naslov završnog/diplomskog rada)*

izradio/la samostalno pod mentorstvom

doc. dr. sc. Ane Katalenić

*(prof. dr. sc./ izv. prof. dr. sc./ doc. dr. sc. ime i prezime)*

U radu sam primijenio/la metodologiju izrade znanstvenog/umjetničkog rada i koristio/la literaturu koja je navedena na kraju završnog/diplomskog rada. Tuđe spoznaje, stavove, zaključke, teorije i zakonitosti koje sam izravno ili parafrazirajući naveo/la u završnom/diplomskom radu povezao/la sam s korištenim bibliografskim jedinicama te nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava. Rad je pisan na standardnom hrvatskom jeziku.

Student/ica

Sara Kostecki

*(vlastoručni potpis)*

Datum: 5. 9. 2024.