

Strategije zbrajanja i oduzimanja u nastavi

Horvatić, Tena

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Education / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:141:399249>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-29**



Repository / Repozitorij:

[FOOZOS Repository - Repository of the Faculty of Education](#)



SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI

Tena Horvatić

STRATEGIJE ZBRAJANJA I ODUZIMANJA U NASTAVI

DIPLOMSKI RAD

Osijek, 2016.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni učiteljski studij

STRATEGIJE ZBRAJANJA I ODUZIMANJA U NASTAVI

DIPLOMSKI RAD

Predmet: Metodika matematike I

Mentor: izv.prof.dr.sc. Ružica Kolar-Šuper

Sumentor: izv.prof.dr.sc. Zdenka Kolar-Begović

Studentica: Tena Horvatić

Matični broj: 2295

Modul: B (informatika)

Osijek, srpanj 2016.

ZAHVALA

Zahvaljujem izv.prof.dr.sc. Ružici Kolar-Šuper što mi je omogućila izradu diplomskog rada s ovom temom i pratila me tijekom rada. Zahvaljujem Osnovnoj školi Mitnica Vukovar, ravnateljici Dubravki Lemac i učiteljicama Jasni Mađarac i Heleni Andabaka što su mi omogućile provođenje istraživanja u svrhu ovog diplomskog rada. Zahvaljujem dr. Dieteru Klaudtu na izuzetnoj pomoći pri izradi diplomskog rada. Zahvaljujem profesorici Dariji Benaković što mi je lektorirala ovaj rad. Velike zahvale mojoj obitelji koja mi je pružila podršku i potporu tijekom svih pet godina studiranja. Nikad vam se neću moći odužiti.

SAŽETAK

Cilj ovoga rada jest predstaviti različite strategije zbrajanja i oduzimanja, kao i ukazati na važnost korištenja različitih pri rješavanju zadataka. Odabir strategija je adaptivan, on ovisi o djetetovom poznavanju određenih strategija i o obilježjima zadataka koje dijete rješava. Cilj rada je, također, predstaviti kognitivne strukture, odnosno mentalne slike, kao važan dio računanja. Način na koji djeca zamišljaju i predstavljaju manje brojeve, pridonosi lakšem prikazu većih brojeva i računskih radnji. Materijali *Rechenschiffchen* i *Zwanzigerfeld* pridonose izgradnji tih kognitivnih struktura. Istraživanje provedeno za potrebe ovoga rada temelji se na problematici izgradnje kognitivnih modela, a izvedeno je na materijalu *Das Zwanzigerfeld mit Wendepättchen*. Istraživanje je provedeno u OŠ Mitnica Vukovar, a sudjelovalo je 37 učenika. Rezultati istraživanja pokazali su da su djeca radne skupine sposobna lakše prikazati i prepoznati određenu strukturu broja i/ili računске radnje. Manje strukture djeca puno lakše prepoznaju na pogled, a materijal je osobito pogodan za rad s djecom sa specifičnim poteškoćama u matematici i vizualnim tipovima učenika. Djeca češće koriste prikaz broja i računске radnje u redu.

Ključne riječi: pojam broja, strategije zbrajanja, strategije oduzimanja, *Rechenschiffchen*, kognitivne strukture

SUMMARY

The purpose of this paper is to present different strategies of addition and subtraction as well as to point out the importance of using different strategies when solving tasks. The selection of strategies is adaptive, it depends on child's knowledge of about specific strategies, as well as on characteristics of the task which is being solved. Moreover, the purpose of the paper is to present cognitive structures, that is, mental images, as an important part of calculating. The way in which children imagine and present smaller numbers contributes to easier presentation of larger numbers and mathematical operations. The materials *Rechenschiffchen* and *Zwanzigerfeld* contribute to the construction of those cognitive structures. The research conducted for the purpose of this paper is based on the issue of construction of cognitive models, and it is carried out on the material *Das Zwanzigerfeld mit Wendepättchen*. The research was conducted in primary school Mitnica Vukovar, with 37 pupils engaged. The results of the research have shown that the children of the working group are capable to easily

present and recognize the specific number and/or operation structure. Children easily recognize the smaller structures on sight, and the material is particularly suitable for working with children with specific difficulties in mathematics as well as for visual types of pupils. Children use the number presentation and operations in a line more often.

Key words: the concept of number, addition strategies, subtraction strategies, *Rechenschiffchen*, cognitive structures

SADRŽAJ

1. UVOD	1
2. POJAM BROJA	3
2.1. Značenja broja.....	3
2.1.1. Brojevi kao niz	4
2.1.2. Brojevi kao skup	4
2.1.3. Brojevi kao omjer	4
2.1.4. Brojevi kao odnos	4
2.2. Usvajanje matematičkih koncepata	5
3. BROJENJE	6
3.1. Temeljna matematičko – logička načela.....	6
3.2. Je li brojenje pri računanju dopušteno?	7
4. SRATEGIJE RAČUNANJA	9
4.1. Strategije zbrajanja.....	9
4.2. Strategije oduzimanja	10
4.3. Strategije računanja u njemačkoj literaturi	11
5. KONKRETNI MATERIJAL U NASTAVI	14
5.1. Od konkretnog prema apstraktnom.....	14
5.2. Ciljevi uporabe konkretnog materijala	15
5.3. Konkretni materijali za računanje u skupu brojeva do 20.....	16
6. RECHENSCHIFFCHEN.....	17
6.1. Izgled i struktura materijala	17
6.2. Prikaz broja na materijalu	18
6.3. Prikaz računskih radnji na materijalu	19
6.4. Uporaba materijala	21
7. PRIKAZ ISTRAŽIVANJA.....	23
8. OPIS AKTIVNOSTI	25
9. REZULTATI I RASPRAVA	29
10. ZAKLJUČAK.....	41
11. LITERATURA	43
PRILOZI.....	45

1. UVOD

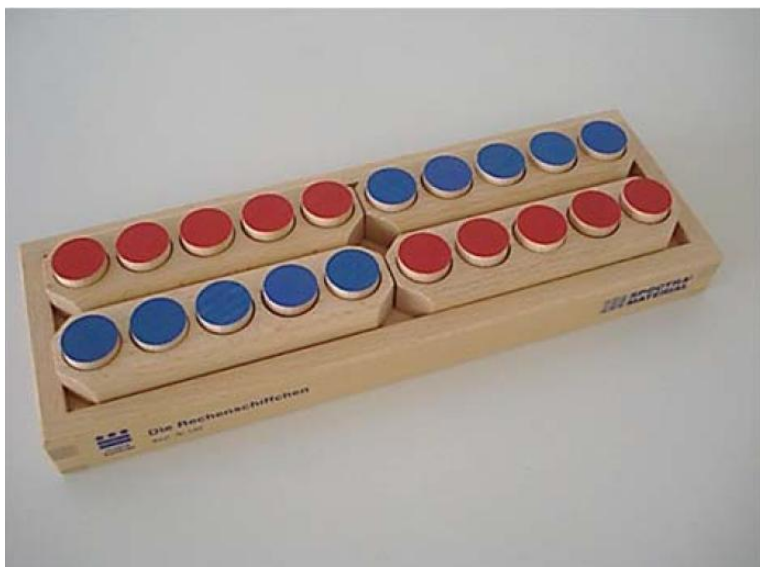
Nerijetko možemo čuti roditelje i osobe bliske nekom djetetu kako govore: „On već zna brojati do 20.“ ili „Tek joj je tri godine, a već broji do 10.“ Postavlja se pitanje shvaćaju li djeca riječi *jedan, dva, tri* zaista kao nazive brojeva, a brojeve kao pojmove koji opisuju količinu ili pak mehanički recitiraju brojevne riječi uvijek u istom naučenom redoslijedu. Brojenje je jedna od važnih matematičkih vještina koju djeca vrlo često stječu neformalnim obrazovanjem u ranom djetinjstvu u sklopu roditeljskih i dječjih aktivnosti poput prebrojavanja koraka, igračaka, prstića, igara vezanih uz brojenje, brojalice i sl. (Geary, 1994., prema Vlahović-Štetić i sur., 2006.). Postoje određeni uvjeti koje treba zadovoljiti kako bismo mogli reći da dijete zna brojati. Budući da je dobro poznavanje redoslijeda brojeva osnova za prvo računanje i strukturiranje brojeva, treba na to obratiti posebnu pozornost (Kaufmann i Wessolowski, 2006.).

Pri rješavanju zadataka zbrajanja i oduzimanja, kasnije množenja i dijeljenja, djeca i odrasli koriste veći broj strategija koje im olakšavaju put do točnog odgovora. Odabir strategija je adaptivan, što znači da u skladu s obilježjima zadatka djeca biraju najbržu i najtočniju strategiju koja im je dostupna (Pavlin-Bernardić, 2006.). Odabir strategije ovisi, dakle, i o djetetu i o obilježjima zadatka. Opis strategija zbrajanja i oduzimanja dan je u nastavku rada.

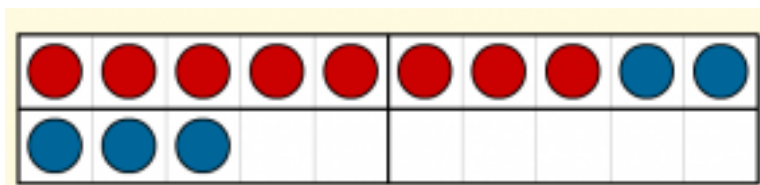
Većina se djece pri dolasku u školu nalazi u fazi konkretnih operacija prema teoriji kognitivnog razvoja Jeana Piageta. Razvoj početnih matematičkih pojmova mora bit u skladu s razvojnim karakteristikama djece te dobi. Fazu konkretnih operacija karakterizira razvoj strategija i pravila za objašnjavanje i istraživanje svijeta oko sebe, a sve uz pomoć rukovanja konkretnim materijalima. Konkretni materijali važni su za stvaranje matematičkih pojmova jer se misaone sheme oblikuju kroz baratanje predmetima, tj. motoričkim putem (Vlahović-Štetić i Vizek Vidović, 1998.).

Cilj ovoga rada jest predstaviti različite strategije zbrajanja i oduzimanja, kao i ukazati na važnost korištenja različitih pri rješavanju zadataka. Drugi zadatak ovog rada jest predstaviti kognitivne strukture (mentalne slike) kao važan dio računanja. S tom problematikom upoznala sam se u Njemačkoj gdje se veliki naglasak stavlja na izgradnju „Mentale Modelle“, kognitivnih struktura kroz rukovanje različitim konkretnim materijalom, a s ciljem lakšeg računanja. Istraživanje provedeno za potrebe ovoga rada temelji se na toj problematici, a izvedeno je na materijalima koje sam također upoznala u Njemačkoj, a zovu

se *Die Rechenschiffchen* („brodić za računanje“) i *Das Zwanzigerfeld mit Wendeplättchen* („ploča s dvadeset polja s okruglim pločicama s jedne strane crvene, a s druge plave boje“). Materijal je korišten i u udžbeniku i radnoj bilježnici iz matematike za 1. razred osnovne škole „Nina i Jan“ autorica Lade Bunjevački, Margite Pavleković i Dragice Varat. Oba materijala baziraju se na istim principima rukovanja, razlika je samo u izgledu.



Slika 1. Didaktički materijal *Rechenschiffchen* (DiLeMa², 2016.:11)



Slika 2. Didaktički materijal *Zwanzigerfeld* (Preuzeto 3.6.2016. sa http://www.lernsoftware-mathematik.de/?page_id=547)

U svakodnevici je puno situacija u kojima se susreće i prepoznaje matematički sadržaj. Njih je potrebno uvijek iznova opisivati i matematički interpretirati kako bi djeca matematiku shvatila kao dio života, a ne samo kao školski predmet (Kaufmann i Wessolowski, 2006.). Uz pomoć konkretnih materijala iz dječje svakodnevice moguće je objasniti sve osnovne aritmetičke operacije s prirodnim brojevima (Lucić, 2007.). Rukovanje materijalom nastavak je na dječju igru i sredstvo stvaranja kognitivnih struktura potrebnih za operacije zbrajanja i oduzimanja.

2. POJAM BROJA

Već u vrlo ranoj dobi započinje usvajanje matematičkih pojmova. S brojem se susrećemo u njegovim raznim oblicima. Von Aster i Holger Lorenz (2013.) navode različite forme broja: kao riječ („tri“), kao brojku (3), kao rimsku znamenku (III), kao nesimbolički zapis (●●● ili ▲▲▲), kao prikaz prstima, kao riječ s brojčanim značenjem (trio, trojka) ili u vremenskom nizu (takt valcera). Razumijevanje broja znači poznavanje načina njegove primjene. Ponekad broj primjenjujemo za preciziranje veličine skupa objekta (primjena broja kao glavnog broja), ponekad za preciziranje položaja objekta u nizu (primjena broja kao rednog broja), ponekad za određivanje veličine objekata (primjena broja kao omjera) i dr. Razumijevanje svih aspekata broja jednako je važno (Sharma, 2001.). Razvoj pojma broja započinje uz pomoć osjetne percepcije preko jezika do formiranja logičkog entiteta. Razvoj pojma broja usko je vezan uz razvoj jezika.

Proces usvajanja pojma broja nije jednostavan linearan proces. On ovisi o preplitanju predmatematičkih vještina u odgovarajuće vrijeme. Predmatematičke vještine su: a) razvrstavanje podataka i predmeta, b) uspoređivanje i ujednačavanje predmeta i skupova, c) nizanje predmeta i održavanje zadanog redoslijeda, d) slijeđenje niza uputa, e) prostorna orijentacija, f) vizualizacija, g) vizualno grupiranje predmeta, h) uočavanje obrazaca, i) procjenjivanje, j) induktivno mišljenje i k) deduktivno mišljenje.

Određeni aspekti pojma broja ne mogu se razviti dok se određena predmatematička vještina ne razvije. Primjerice, prebrojavajući skup dijete dođe do zadnjeg predmeta i kaže: „Sedam“, to za njega u ranijoj dobi znači ime zadnjeg objekta, ali ne i obilježje cijelog skupa. Ovakvo shvaćanje traje dok se u djetetu ne razvije vještina uspoređivanja i ujednačavanja. Također, dokle god se ne razvije vještina prostorne orijentacije i organizacije dijete neće biti u stanju odrediti položaje lijevo-desno, gore-dolje, ispred-iza, više (>) - manje (<) i sl. Tri predmatematičke vještine važne za usvajanje koncepta broja i računskih radnji su: vizualno grupiranje, procjenjivanje količine i rezultata radnje te uočavanje i proširivanje obrazaca.

2.1. Značenja broja

U različitim kontekstima broj može imati i različita značenja. U nastavku su objašnjeni aspekti pojma broja koje navodi Sharma (2001.:149).

2.1.1. Brojevi kao niz

Poznavanje brojeva kao niza znači poznavanje da „jedan“ znači jedan predmet u nekom skupu, „dva“ znači jedan predmet više nego „jedan“, „tri“ znači jedan predmet više nego „dva“, itd. Tako riječ „pet“ znači jedan predmet više nego „četiri“ i jedan manje od „šest“. Time je naglašeno da je svaki broj dio niza. Usvajanju ovog pojma pridonose didaktički materijali poput brojevne crte, kockica, štapića i dr.

2.1.2. Brojevi kao skup

Većina podučavanja u školi počinje od ovog aspekta značenja broja kada se djeci pokaže skup predmeta i traži da odrede njihov broj. Dakle, to je poznavanje da „dva“ predstavlja skup od dva objekta, „tri“ skup od tri objekta, itd. Na primjeru broja „pet“ to znači da dijete prepozna skup od pet zasebnih jedinica, objekata. Ime zadnjeg objekta dijete treba shvatiti kao obilježje cijelog skupa, ne samo kao ime tog zadnjeg objekta.

2.1.3. Brojevi kao omjer

Već mala djeca mogu odrediti je li neki lik veći ili manji od drugoga, koji predmet je kraći, a koji dulji, no prosuđivati stvarnu veličinu ili duljinu nauče kasnije. Poznavati brojeve kao omjer znači osvijestiti da „dva“ znači dva puta onoga što je označeno kao jedan, „pet“ znači pet puta onoga što je određeno kao jedan. Didaktički materijal pogodan za usvajanje ovog aspekta broja jesu Cuisenaire štapići gdje svaki broj određuje duljina štapića i boja. Razumijevanje ovog aspekta broja preduvjet je za razumijevanje koncepta mjerenja.

2.1.4. Brojevi kao odnos

Uzevši za primjer broj pet, poznavati broj „pet“ u ovom smislu znači poznavati da je pet više od tri i četiri, a manje od šest i sedam, da je pet zbroj tri i dva, četiri i jedan, da zajedno s tri daje osam i sl. Ovaj aspekt govori o odnosu nekog broja s drugim brojevima i njegovo razumijevanje početak je razumijevanja računskih aspekata brojeva.

Broj percipiramo, razumijemo i primjenjujemo u raznim značenjima. Nešto trebamo izbrojati, nešto izmjeriti, a nešto uvidjeti kao jedinstven skup (Sharma, 2001.:151). Za optimalno shvaćanje pojma broja potrebno je poznavati sve aspekte broja. Problem nastaje kada učitelji djecu upoznaju samo s nekim aspektima broja, a to se događa jer su često

ograničeni na udžbenike koji nude samo jednu strategiju podučavanja pojma broja, najčešće strategiju brojenja i dodavanja, pa djeca otkrivaju numeričke činjenice putem brojenja, najčešće na prste. Prevladavanje ovog problema moguće je uz uporabu raznovrsnih nastavnih materijala. Usvajanje pojma broja rezultat je mentalne aktivnosti djeteta s objektima, to je interaktivni proces.

2.2. Usvajanje matematičkih koncepata

S usvajanjem pojma broja u vezi, važno je spomenuti općeniti proces usvajanja matematičkih koncepata. Matematički koncepti nisu izolirane, nego su međusobno umrežene cjeline (Sharma, 2001:82). Put od upoznavanja s novim konceptom do ovladavanja njime prolazi šest koraka, odnosno stupnjeva. To su:

- a) Intuitivni stupanj – ono novo što smo čuli povežujemo s onim što već znamo; povezuje se staro i novo znanje;
- b) Konkretni stupanj – učenicima je potreban konkretan materijal pri upoznavanju novog koncepta; manipulacijom predmetom učenik stječe nove spoznaje;
- c) Slikovni stupanj – nakon konkretnog manipuliranja, učenik treba vidjeti zapis koncepta putem slike, na papiru, štoviše treba učenicima dati priliku da sami nacrtaju što vide na slici;
- d) Apstraktni stupanj- na ovom stupnju učenik treba biti sposoban informaciju apstrahirati od predmeta i slika i prevesti na jezik simbola i formula;
- e) Praktična primjena znanja – na ovom stupnju učenik je sposoban matematička znanja iz jednog područja primijeniti u drugim područjima u matematici, ali također i u drugim predmetima te stvarnim životnim situacijama;
- f) Komunikacijski stupanj – objasniti i obrazložiti svoje postupke krajnji je stupanj u usvajaju matematičkih koncepata; ovaj stupanj predstavlja najvišu razinu shvaćanja nekog koncepta – ako je učenik sposoban verbalizirati ono što radi, jasno je da to i shvaća.

3. BROJENJE

Jedna od važnih matematičkih vještina koju djeca stječu vrlo rano, neformalnim obrazovanjem, jest brojenje. Brojenje u tim prvim godinama dječjeg razvoja jedan je od načina igre i zabave, a time i vrsta komunikacije između djeteta i okoline (Geary, 1994., prema Vlahović-Štetić i sur., 2006.). Uz roditelje, djeca već tijekom druge godine života nauče nazive brojeva, no u toj dobi im brojevi predstavljaju samo rituale pri obavljanju nekih radnji: jedenja – brojenje zalogaja, penjanja stubama i hodanja – brojenje koraka, igranju i raznim brojalicama (Wynn, 1992., prema Marendić, 2009.). Tijekom treće godine počinje stvarno učenje brojenja, a za većinu četverogodišnjaka brojenje u skupu do 10 je još uvijek težak zadatak (Gallistel i Gelman, 1992., prema Vlahović-Štetić i sur., 2006.). Pri polasku u školu većina djece zna brojati najmanje do 20. Budući da je dobro poznavanje redosljedja brojeva osnova za prvo računanje, treba na to obratiti posebnu pozornost (Kaufmann i Wessolowski, 2006.).

Prvo pitanje koje se postavlja jest kada možemo reći da dijete zna brojati?

3.1. Temeljna matematičko – logička načela

Vještina brojenja temeljni je preduvjet za učenje zbrajanja i oduzimanja, stoga je vrlo važno naučiti brojati. Da bismo mogli reći da neko dijete zna brojati ono mora pokazati svladanost sljedećih temeljnih logičkih načela – načela brojenja (prema Vlahović-Štetić i Vizek Vidović, 1998.):

- a) Načelo *pridruživanja* „jedan prema jedan“ – pri prebrojavanju predmeta u nekom skupu svakom predmetu pridružuje se samo jedan broj. Također, premda se redosljed brojeva pri brojenju mora poštovati, svejedno je od kojeg se elementa u skupu počne brojati.
- b) Načelo *kardinalnosti* – posljednji broj koji se izgovori pri brojenju skupa predmeta kardinalni je broj i označava ukupan broj predmeta u skupu; ovo načelo u vezi je s prethodnim načelom i razvija se poslije (Gelman i Gallistel, 1986.); odgovor na pitanje *Koliko nečega ima u nekom skupu?* pokazatelj je svladanosti načela kardinalnosti; ovo načelo djeca počinju razumijevati s četiri godine (Frye i sur., 1989., prema Vlahović Štetić i Kovačić, 1997.).
- c) Načelo *ordinalnosti* – ovo načelo odnosi se na spoznaju o tome da su brojevi poredani prema uzlaznom nizu veličine- 3 je uvijek veće od 2, 2 je veće od 1, itd.; načelo je usvojeno ako dijete točno može reći koji je predmet po redu prvi, drugi ili treći.

- d) Načelo *izmjerljivosti* – ovo načelo kaže da se pojedini predmeti mogu uspoređivati ako se pri usporedbi koriste iste mjerne jedinice; i bez poznavanja mjerne jedinice za duljinu – metra – ako dijete može usporediti duljine stola i bilježnice, sobe i učionice i sl. koristeći pri tome vlastiti dlan, stopalo ili lakat možemo reći da je usvojilo načelo izmjerljivosti.
- e) Načelo *konzervacije* – bez obzira kako su predmeti u skupu raspoređeni, njihov broj ostaje nepromijenjen, sačuvan; tipičan primjer shvaćanja načela konzervacije pokazuje dijete koje pri prelijevanju 1 dcl vode iz šire u užu čašu kaže da je unatoč razini vode količina vode ostala ista.
- f) Načelo *tranzitivnosti* – ovo načelo uzima u obzir odnose između više (barem tri) predmeta, a ide po načelu: ako je A veće od B, a B veće od C, tada slijedi da je i A veće od C (Vlahović-Štetić i sur., 2006.).
- g) Načelo *reverzibilnosti* (povratnosti) – odnosi se na spoznaju o tome koje promjene mijenjaju količinu, a koje ne; uočavanje reverzibilnog odnosa između zbrajanja i oduzimanja uvjet je za osnovno računanje.

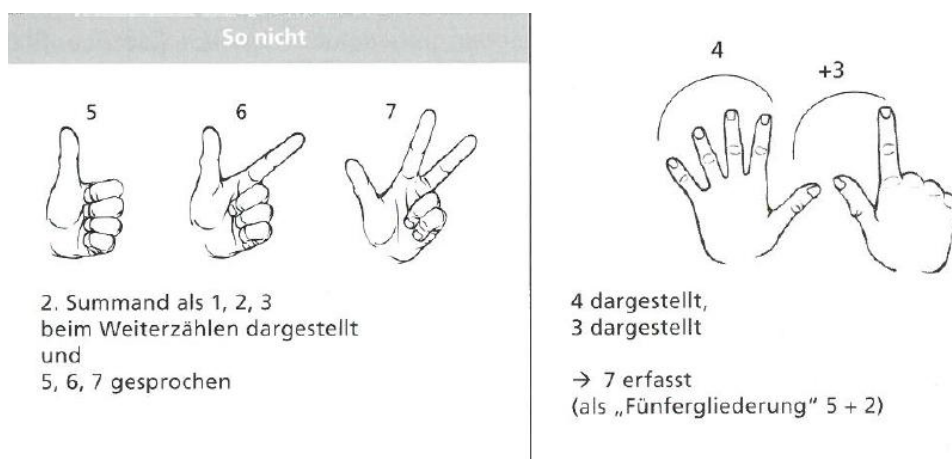
Načela brojenja razlikuju se kod pojedinih autora. Na primjer, Gelman i Gallistel (1986.) predlažu sljedeća načela: načelo pridruživanja „jedan prema jedan“, načelo stalnosti reda, načelo kardinalnosti, načelo apstrakcije, načelo nevažnosti reda. Vlahović-Štetić, Nadilo i Pavlin-Bernardić (2006.) navode sljedeća načela brojenja: načelo pridruživanja „jedan prema jedan“, načelo kardinalnosti, ordinalnosti, konzervacije i reverzibilnosti, a za načela izmjerljivosti i tranzitivnosti navode da su važna u zadacima uspoređivanja, ali da nisu neophodna za vještinu brojenja. Također, Gelman i Gallistel (1986.) navode načela *pridruživanja* „jedan prema jedan“, *kardinalnosti* i *ordinalnosti* kao tri načela koja je potrebno svladati da bi znali brojati. Naziva ih „how-to-count“ principles – „kako brojiti“ načela. Ako dijete poštuje ova tri načela, broji pravilno.

Sljedeće pitanje jest je li prebrojavanje dopušteno i do kada ga treba prihvatiti?

3.2. Je li brojenje pri računanju dopušteno?

Postoji dvojba o tome je li brojenje i koliko dugo prebrojavanje treba biti dopušteno u nastavi matematike. Prebrojavanje je potrební korak koji nijedno dijete ne preskače (Lorenz, 2002., prema Kaufmann i Wessolowski, 2006.). Prema Kaufmann i Wessolowski (2006.) što prije treba prebrojavanje kao strategiju računanja izbaciti te do kraja prvog razreda zadatke

računanja u skupu brojeva do 20 rješavati neprebrojavajući. Za neke učenike to će i dalje ostati nemoguće te će pri računanju koristiti prste. Ponekad kada nekog učenika pitate koji je rezultat zbroja neka dva broja, npr. $4 + 3$, ono gleda bez ikakva izraza na licu te nakon nekog vremena izrekne odgovor: „7!“ To je dokaz da je dijete negdje u glavi pohranilo informaciju koliko je to „četiri“ i koliko je to „tri“, samo je trebalo vrijeme da u glavi vizualizira slike četiri prsta i tri prsta te izračuna zbroj. Dijete je moglo koristiti dvije strategije pri tom računanju – dinamičku (odbrojavati drugi pribrojnik) ili statičku (zamisliti prikaze oba pribrojnika i odmah na pogled znati koliko je to). Autori navode da je u početnoj fazi bitno u zadacima računanja do 10 produktivno koristiti prste, što znači pri rješavanju zadatka $4 + 3$ broj 7 postaviti kao 4 prsta i 3 prsta, ne brojeći ih nego pokazujući odmah “četiri na hrpi” i „tri na hrpi“.



Slika 3. Dinamičko i statičko korištenje prstiju u zadatku $4 + 3$ (Kaufmann i Wessolowski, 2006.: 33)

4. SRATEGIJE RAČUNANJA

Pod pojmom strategije podrazumijevamo namjerni postupak pomoću kojeg želimo ostvariti neki cilj, odnosno riješiti problem (Siegler i Jenkins, 1989., prema Vlahović-Štetić i Vizek Vidović, 1998.:26). Dakle, strateško ponašanje uključuje prepoznavanje cilja, izbor sredstava kojima se taj cilj može ostvariti i računanje. Pri rješavanju zadataka djeca, a i odrasli, ne koriste samo jednu strategiju, već više njih. Pavlin-Bernardić (2006.) navodi da se različite strategije pojavljuju ne samo kod različite djece iste dobi, nego i kod istog djeteta pri rješavanju sličnih zadataka. S dobi i iskustvom učestalost korištenja postojećih strategija se mijenja, otkrivaju se nove strategije, a neke stare prestaju koristiti.

Obilježja koje izbor strategije uzima u obzir su (Siegler i Shrager, 1984., prema Pavlin-Bernardić, 2006.): a) točnost rješenja dobivenih korištenjem određene strategije, b) količina vremena koje primjena strategije zahtijeva, c) opterećenje za pamćenje, d) raspon problema na koji se određena strategija može primijeniti. Što je širi raspon strategija kojima osoba raspolaže, to bolje odgovara zahtjevima različitih problema. U skladu s obilježjima zadatka djeca nastoje birati najbržu i najtočniju dostupnu strategiju.

4.1. Strategije zbrajanja

Strategije zbrajanja u djece predškolske i rane školske dobi su sljedeće (Vlahović-Štetić, Vizek Vidović, 1998.):

1. *Prebrojavanje svih članova u skupi*: zadatak $3 + 5$ dijete rješava tako da podigne tri prsta, zatim pet i broji izgovarajući: „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8“.
2. *Nastavljanje brojenja od prvog pribrojnika*: zadatak $3 + 5$ dijete rješava tako da podigne tri prsta i nastavi podizati još pet prstiju uz odbrojavanje: „4, 5, 6, 7, 8“.
3. *Strategija „pribrajanje manjeg“*: zadatak $3 + 5$ dijete rješava tako da digne pet prstiju (veći pribrojnik) i nastavi dodavati još tri prsta odbrojavajući: „6, 7, 8“. Ova strategija predstavlja napredak u smislu veće ekonomičnosti računanja, a primjena ove strategije pokazuje da je dijete shvatilo načela kardinalnosti i reverzibilnosti.
4. *Kombinacija dosjećanja i strategije*: zadatak $7 + 9$ osoba može riješiti tako da drugi pribrojnik rastavi na $7 + 2$, iz sjećanja dozove rezultat $7 + 7 = 14$ i zatim, rabeći strategiju pribrojavanja manjeg, doda preostalih 2. Pri rješavanju s većim brojevima, istodobno se koriste i činjenično znanje i strategije.

5. *Strategije dosjećanja*: zadatak $7 + 9$ dijete rješava tako da iz dugoročnog pamćenja dozove informaciju i odgovori: „16“.

Analogne strategije spominju Gelman i Gallistel (1986.).

Siegler i Jenkins (1989.) navode još neke strategije zbrajanja:

6. *Prepoznavanje prstiju*: zadatak $3 + 5$ dijete rješava tako da digne tri prsta, zatim još pet i kaže „8“, bez računanja, na pogled.
7. *Ubrzano odbrojavanje*: broji se „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8“ dok se istodobno uz svaki broj diže novi prst.
8. *Pogađanje*: zadatak $3 + 5$ dijete rješava tako da izgovori neki odgovor i objasni: „Pogađao sam.“
9. *Rastavljanje*: zadatak $3 + 5$ dijete rješava tako da razmišlja: „ $3 + 5$ je isto kao i $4 + 4$, a to je 8“.

4.2. Strategije oduzimanja

Kod oduzimanja, početne strategije oduzimanja oslanjaju se na mogućnost i razumijevanje brojenja unazad. Moguće su sljedeće strategije (Vlahović-Štetić, Vizek Vidović, 1998.):

1. *Strategija umanjivanja*: zadatak $8 - 5$ dijete rješava tako da digne osam prstiju i od njih odbroji pet, a zatim prebroji preostale prste.
2. *Strategija uvećavanja*: zadatak $8 - 5$ dijete rješava tako da digne manji broj (umanjitelj) i broji prste dok ne stigne do većeg broja (umanjenika). Dakle, dijete digne pet prstiju pa odbrojava: „6, 7, 8“, te konstatira da mu do 8 trebaju još tri prsta.
3. *Izborna strategija*: ovisno o prirodi zadatka dijete odabire jednu od gore opisanih strategija oduzimanja. Zadatak $7 - 2$ dijete će riješiti upotrebljavajući strategiju umanjivanja, a zadatak $7 - 5$ upotrebljavajući strategiju uvećavanja.
4. *Strategija dosjećanja*: zadatak $8 - 5$ dijete rješava tako da iz dugoročnog pamćenja dozove informaciju i odgovori: „3“.

Znatnu pomoć pri rješavanju zadataka pruža uporaba prstiju. No, teškoće se javljaju već pri računanju s pribrojnicima većim od 5. Primjerice, kada dijete treba zbrojiti 7 i 2, problem nastaje ako ne zna kako prikazati broj sedam jer premašuje broj prstiju jedne ruke te kako mu zatim pribrojiti dva. U takvim situacijama potreban je konkretan materijal koji će omogućiti lako i jednostavno prikazivanje matematičkih zadataka koji uključuju računanje s brojevima većim od 10 (Vlahović-Štetić, Vizek Vidović, 1998.).

Mahesh Sharma (2001.) veliku pozornost daje razumijevanju dječjeg odabira strategija. Navodi da su djetetov stupanj mišljenja i strategije koje koristi da bi došlo do odgovora na matematički zadatak mnogo važniji od rezultata. Što dijete misli? Kako ono pristupa određenom zadatku? Koje strategije bira? Kako dolazi do ispravnog ili pogrešnog odgovora? (Sharma, 2001.:43). Kognitivne strategije koje učenik bira pokazatelj su stupnja djetetovog kognitivnog razvoja i spremnosti za usvajanje novih koncepata. Strategije su važnije od ispravnih odgovora (Sharma, 2001.:47).

4.3. Strategije računanja u njemačkoj literaturi

U onom poglavlju razmatrat ćemo klasifikaciju i opis strategija koje daju autori u njemačkoj literaturi.

Tri su različite strategije računanja:

a) Strategije brojenja (Zählstrategien)

Strategije brojenja pojavljuju se neovisno o kulturi u kojoj dijete odrasta i neovisno o tome ide li dijete u školu ili ne. Ove prirodne strategije rješavanja zadataka zbrajanja i oduzimanja djeca koriste u početku. Unutar ove skupine postoje dvije vrste strategija: prebrojavanje (*Alles-Zählen*) i odbrojavanje/ daljnje brojenje (*Weiterzählen*).

Prebrojavanje: oba pribrojnika prikažemo, a zatim sve prebrojavamo.

1. Schritt: Darstellen beider Summanden



2. Schritt: Abzählen von vorn



Slika 4. Prikaz strategije prebrojavanja

Odbrojavanje: jedan pribrojnik dijete zamisli u glavi ili prikaže uz pomoć prstiju, izrekne njegov broj pa nastavi brojati ili podizati prste uz odbrojavanje onoliko koliki je drugi pribrojnik.

1. Schritt: Benennung des ersten Summanden

3 -

2. Schritt: Weiterzählen mit stillem Abzählen der Zählsschritte ...

3	-	4	5	6	7	8
		1	2	3	4	5

oder mit sukzessivem Aufzeigen der Finger ...

3 - 4 5 6 7 8



Slika 5. Prikaz strategije odbrojavanja

b) **Računanje napamet** (strategija dosjećanja; Auswendigwissen)

Strategija dosjećanja brza je strategija rješavanja zadataka. Puno djece već u prvom razredu zna napamet zadatke poput: „ $2 + 2 = 4$ “ ili „ $5 + 5 = 10$ “, no znaju to kao pjesmicu. Stoga je važno da ta djeca u prvom razredu rukuju konkretnim materijalom kako bi razumjeli značenje tih zadataka.

c) **Heurističke, odnosno operativne strategije** (Heuristische bzw. operative Strategien)

Pod ovim strategijama shvaćene su strategije fleksibilnog rukovanja brojevima, posebice: *udvostručenje i prepolavljanje, rastavljanje i sastavljanje, promjena u suprotnim i istim smjerovima.*

Strategija „dvostruko više“ i „upola manje“: u skupu brojeva do 10 ova strategija igra veliku ulogu. Tu pripadaju zadatci koje djeca znaju i trebaju znati napamet, poput $4 + 4$. S ovim znanjem djeca mogu riješiti i zadatke poput $4 + 5$ ili $4 + 3$ (zadatci izračunavanja susjeda udvostručenja).

Strategija sastavljanja i rastavljanja: ova strategija do veće važnosti dolazi u zadatcima s prijelazom desetice ($7 + 8 = 7 + 3 + 5 = 10 + 5 = 15$).

Strategija promjene vrijednosti pribrojnika u suprotnom smjeru pri zbrajanju i promjene vrijednosti umanjenika i umanjitelja u istom smjeru pri oduzimanju: zadatak $9 + 7$ dijete može riješiti uz pomoć zadatka $10 + 6$, dakle prvi pribrojnik uvećan je za 1 (jer se s 10 lakše zbrajati), a drugi je zato smanjen za 1. Zadatak $11 - 7$ dijete može riješiti uz pomoć zadatka $10 - 6$, dakle i umanjenik i umanjitelj smanjeni su za 1.

Cilj nastave je djecu bez zabrane korištenja strategija brojenja postupno voditi prema znanju napamet i heurističkim strategijama.

5. KONKRETNI MATERIJAL U NASTAVI

Pri polasku u školu djeca posjeduju određena matematička znanja pa je važno da se poučavanje u školi nadovezuje na dječje svakodnevno iskustvo te se prilikom poučavanja koriste konkretni materijali. Također, djeca se pri polasku u školu nalaze u fazi konkretnih operacija pa im i zbog toga treba omogućiti slobodno baratanje konkretnim materijalom. U toj fazi djeca imaju sposobnost logički razmišljati o konkretnim sadržajima – stvarati pojmove, uviđati odnose i rješavati probleme. Konkretni materijali važni su za stvaranje matematičkih pojmova jer se unutarne kognitivne sheme oblikuju kroz rukovanje predmetima, tj. motoričkim putem (Vlahović-Štetić, Vizek Vidović, 1998.). Učenje računanja u osnovnoj školi temelji se na konkretnom rukovanju materijalom i njihovim grafičkim prikazima, a tek kasnije na brojkama i matematičkim simbolima. Prije nego što djeca simbolički zapišu zadatak „ $3 + 2 = 5$ “, ovaj će probleme biti riješen s konkretnim svakodnevnim materijalom kao što su klikeri i/ili didaktičkim materijalom kao što su *Plättchen* (okrugle pločice u boji) i prikazan u slikama (Kaufmann i Wessolowski, 2006.).

5.1. Od konkretnog prema apstraktnom

Koji je put razumijevanja matematičkih pojmova? Zašto se naglašava važnost konkretnog materijala? Ovaj odjeljak dat će odgovor na ova pitanja.

Djetetovo matematičko iskustvo, kao i sva njegova iskustva, razvijaju se slijedom apstrahiranja koja možemo podijeliti ovako (Liebeck, 1984.):

I – *iskustvo* fizičkih predmeta

G – *govorni jezik* koji opisuje to iskustvo

S – *slike* koje prikazuju to iskustvo

Z – *pisani znakovi* ili simboli koji generaliziraju to iskustvo.

Liebeck (1984.) je objasnila ovaj slijed na pojmu *lopte*: I – iskustvo – dijete vidi, osjeća, drži, kotrlja loptu; G – govor – zvuk riječi „lopta“ povezuje s igračkom, sa stvarnom loptom, a to mu pomaže da komunicira s okolinom; S – slika – dijete prepoznaje sliku lopte, uviđa da slika lopte ima dovoljno zajedničkih obilježja s njegovom loptom i da ju može nazvati „lopta“; Z – znakovi – poslije će dijete naučiti slova za riječ „lopta“.

Isto vrijedi i za usvajanje matematičkih pojmova. Razmotrimo to na primjeru broja 2. Iskustvo: dijete rukuje s dvama predmetima, npr. dva bombona, dvije olovke, dvije kockice, dva klikera. Govor: uz vodstvo starije osobe koja ponavlja riječ „dva“ dijete shvaća da sve one predmete povezuje riječ „dva“, te počinje rabiti naziv „dva“ za bilo koja dva predmeta. Slika: dijete je u stanju na slici prepoznati dva predmeta. Znakovi: kada to bude bilo potrebno dijete će naučiti kako se piše riječ „dva“.

Kad god je to moguće, potrebno je gradivo obraditi tako da se djeci omogući konkretno iskustvo, zatim da se opisuje i pokušava objasniti ono što se opazilo, potom prikazuje slikom ili shemom, pa odgovarajućim simbolima (Vlahović-Štetić, Vizek Vidović, 1998.).

5.2. Ciljevi uporabe konkretnog materijala

Tri su cilja uporabe konkretnog materijala u nastavi (Kaufmann i Wessolowski, 2006.):

a) Razumijevanje broja

Za razumijevanje pojma broja materijal koristimo u sljedećim aktivnostima: brojenje i odbrojavanje, prepoznavanje, čitanje i pisanje brojeva, prikaz broja i prepoznavanje broja na pogled, odnosi među brojevima i značenje brojeva (ordinalnog i kardinalnog aspekta), uspoređivanje brojeva (veći – manji), procjenjivanje količine, određivanje prethodnika i sljedbenika, smještanje broja na brojevnu crtu.

b) Razumijevanje računskih radnji

Za razumijevanje računskih radnji materijal koristimo u sljedećim aktivnostima: prevođenje između različitih forma prikaza (npr. veza između zbrajanja i oduzimanja, množenja i dijeljenja), izgradnja osnovnih ideja: zbrajanja (dodavanje, ujedinjavanje, uspoređivanje), oduzimanja (uzimanje, dopunjavanje, uspoređivanje), množenja, dijeljenja kao podijele i dijeljenja kao širenja.

c) Razvoj različitih strategija računanja, strateškog načina razmišljanja

Za razvoj različitih strategija računanja i strateškog načina razmišljanja, materijal koristimo u sljedećim aktivnostima: zamjena mjesta pribrojnicima, zamjena računskih radnji

(suprotne računске radnje), rastavljanje i sastavljanje brojeva, promjena vrijednosti pribrojnika te umanjenika i umanjitelja, korištenje pomoćnih zadataka, korištenje analogija.

Također, veliki zadatak konkretnog materijala je izgradnja spomenutih kognitivnih struktura, mentalnih slika, tzv. *Mentale Modelle*. *Mentale Modelle* su kognitivne strukture pomoću kojih osoba organizira svoje iskustvo i znanje tako da dosegne sustavni prikaz tog znanja. Te vizualne predodžbe razvijaju se u kasnijoj fazi razvoja djeteta na temelju samostalnog rukovanja materijalima. Jednostavan primjer, što su to vizualne predodžbe na pojmu broja tri jest imati u glavi sliku tri predmeta, znati pri pogledu na neku sliku da su na njoj nacrtana tri trokuta, bez brojenja prepoznati da je netko dignuo u zrak tri prsta, tri olovke, tri balona. Stvarati kognitivne strukture važno je zbog lakšeg računanja u budućnosti.

5.3. Konkretni materijali za računanje u skupu brojeva do 20

U njemačkoj literaturi moguće je pronaći sljedeće materijale koji pomažu pri računanju u skupu brojeva do 20:

- Rechenschiffchen
- abak/ staro računalo s kuglicama (danas poznato kao dječja igračka)
- polje za 10 pločica (Zehnerfeld)
- igraća kocka
- Zwanzigerfeld mit Wendepättchen (polje za dvadeset pločica i pločice)
- Cuisenaire štapići
- prirodni materijali
- novci za računanje i dr.

Neka djeca jače razvijaju vizualno predočavanje, neka se pak više oslanjaju na jezik, pojmove i odnose među njima. Upravo zbog tih individualnih razlika potrebno je djeci, pri uvođenju pojmova, omogućiti što raznovrsniji dodir s konkretnim materijalima. Matematički postupci i vještine koje se uče izdvojeno iz smislenog konteksta ne mogu se lako primijeniti u stvarnim životnim situacijama.

6. RECHENSCHIFFCHEN

Velika pozornost ovoga rada usmjerena je na proučavanje didaktičkog materijala *Die Rechenschiffchen* – brodić za računanje i *Das Zwanzigerfeld mit Wendepättchen* – ploča s dvadeset polja s okruglim pločicama s jedne strane crvene, a s druge plave boje. Oba materijala baziraju se na istim principima rukovanja, razlika je samo u izgledu. U nastavku će se koristiti naziv Rechenschiffchen, ali sve to vrijedi i za Zwanzigerfeld mit Wendepättchen.

6.1. Izgled i struktura materijala



Slika 6. Didaktički materijal *Rechenschiffchen* (preuzeto 10.6.2016. sa <http://www.specials4schools.com/shop/de/rechnen/hilfsmaterial/die-rechenschiffchen/>)

Rechenschiffchen je drveni materijal koji se sastoji od drvenog postolja (okvira) popunjenog sa četiri manja drvena okvira od kojih u svaki stane pet malih drvenih valjaka. Kod svakog je valjka jedna baza obojana u crveno, a druga u plavo kako bi zorno predočili računске radnje.

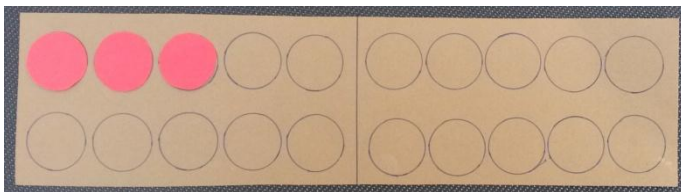
Materijal je s razlogom podijeljen u manje strukture od pet valjaka ili kružića. Zašto? Prvi prirodni dječji način računanja jest uz pomoć prstiju. Prstiju na svakoj ruci ima pet, na obje ruke to je deset, što odgovara jednom redu u Brodiću. Prije nego što rade na ploči s dvadeset polja, u Njemačkoj rade na ploči od deset polja, što odgovara jednom redu Brodića pa im je lako kasnije se prebaciti na veću strukturu kada počnu raditi s brojevima većim od deset. Kao što se vidi na slici, svaki od dijelova može se izvaditi ukoliko učenicima ne treba u pojedinom zadatku ili ukoliko im treba nešto još zornije prikazati.

Rechenschiffchen služi strukturiranom prikazu nekog broja ili neke računске radnje. Da bi se mogli sigurno kretati među brojevima do 20 potrebno je da djeca izgrade ideju, odnosno sliku tih brojeva.

6.2. Prikaz broja na materijalu

Dva su osnovna tipa prikaza broja u Brodiću:

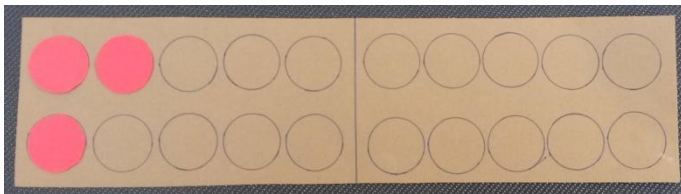
a) **Red** – prikaz broja tako da se prvo popunjava cijeli prvi red. Broj 3 prikazao bi se ovako:



Slika 7. Prikaz broja tri u redu

Broj 10 bio bi prikazan kada bi cijeli prvi red bio popunjen.

b) **Blok** – prikaz broja po stupcima. Broj 3 prikazao bi se ovako:

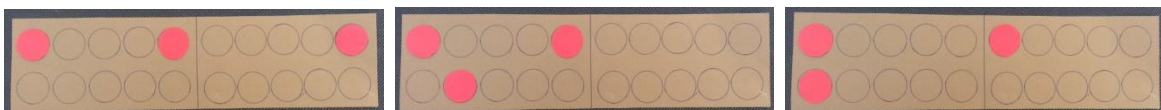


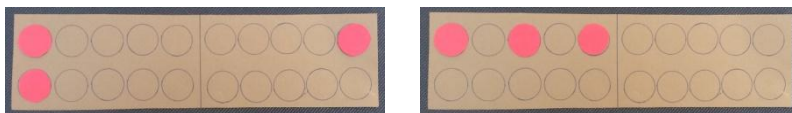
Slika 8. Prikaz broja tri u bloku

Broj 10 bio bi prikazan kada bi lijeva dva okvira po pet bila popunjena.

Oba načina prikaza treba prikazati učenicima, a oni će onda odabrati onaj koji njima više odgovara. Nije važno kojoj strukturi djeca daju prednost, bitno je pogledom moći prepoznati koliko je na Brodiću prikazano.

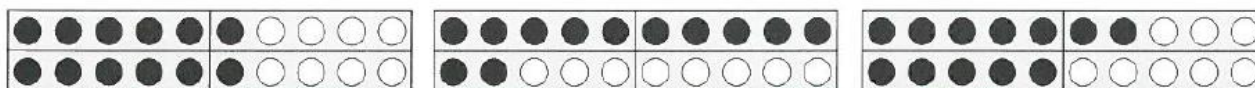
Pri prvim susretima s materijalom mogući su i sljedeći prikazi broja 3 i još mnogi drugi nestrukturirani prikazi, no njih ne treba koristiti jer ne pridonose razvoju struktura ni pojma broja tri:





Slika 9. Prikaz broja tri na nestrukturiran način

Na sljedećoj slici dan je prikaz broja 12 na različite načine (Kaufmann i Wessolowski, 2006.:53).



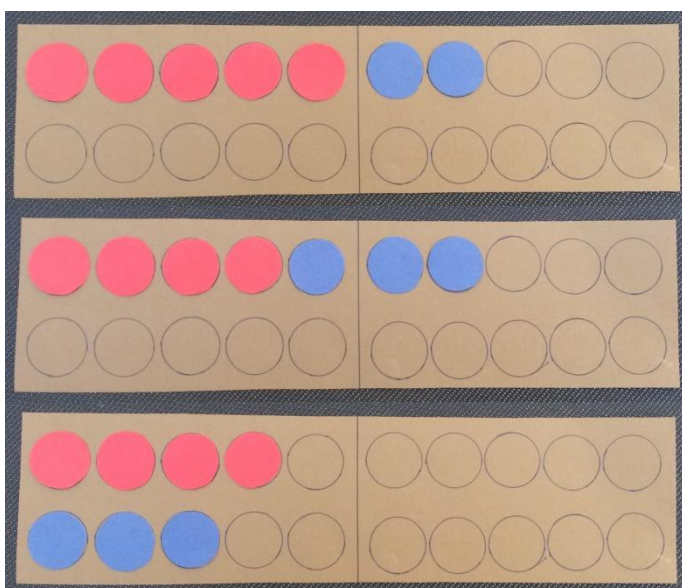
Slika 10. Prikaz broja 12 na različite načine (Kaufmann i Wessolowski, 2006.:53)

Što sustavnije treba djecu voditi kroz prikaz u Brodiću jer im to olakšava kasnije operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja („dvostruko više“) i dijeljenja („upola manje“).

6.3. Prikaz računskih radnji na materijalu

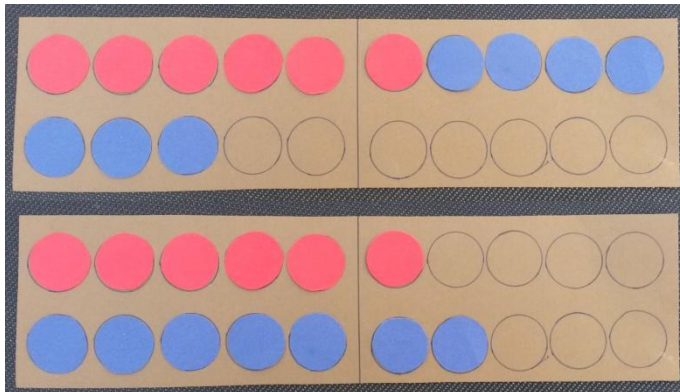
Veliku podršku pri računskim radnjama također pruža ovaj materijal. U nastavku slijedi prikaz nekih operacija na Brodiću.

Zbrajanje bez prijelaza desetice: Gornji dio slike prikazuje 7 kao sumu brojeva 5 i 2. Srednji i donji dio slike prikazuju 7 kao sumu brojeva 4 i 3, razlika je u načinu prikaza: srednji dio prikazuje sumu $4 + 3$ u redu, a donji dio u bloku.



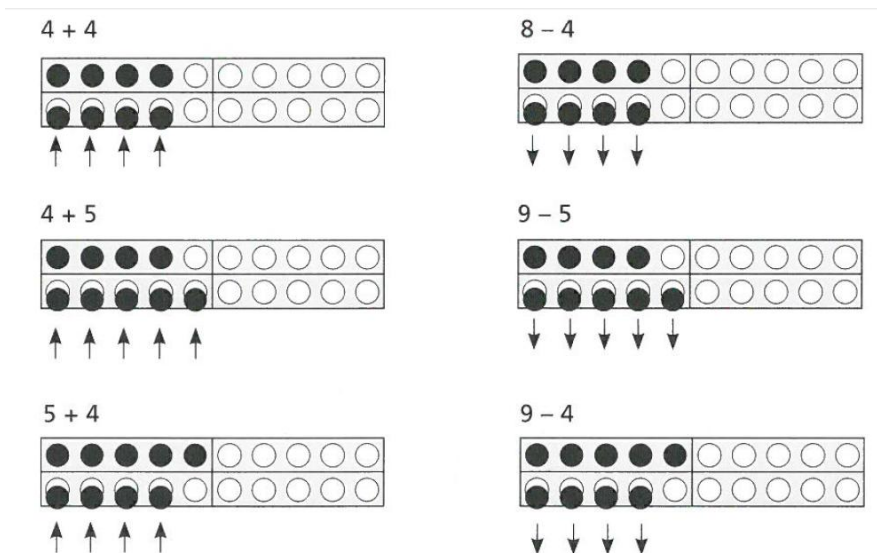
Slika 11. Prikaz sume 7

Zbrajanje s prijelazom desetice: Gornji dio slike prikazuje sumu $6 + 7$ u redu, a donji dio slike u bloku.



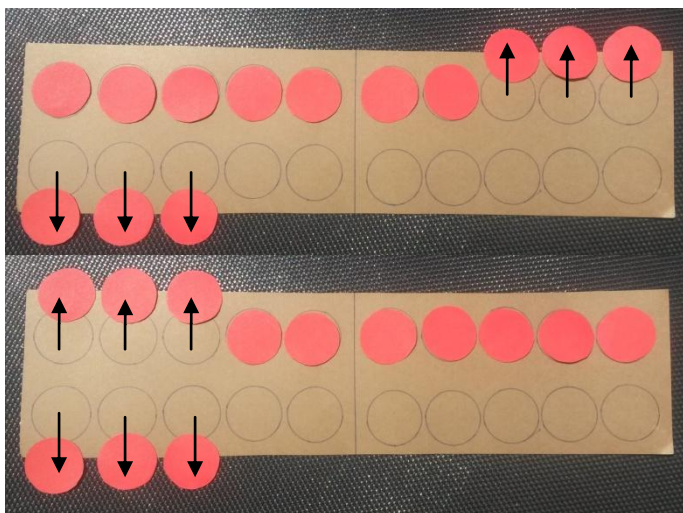
Slika 12. Prikaz zadatka $6 + 7$

„Dvostruko više“, „upola manje“ i susjedi: Uz pomoć Brodića moguće je vrlo lako obraditi temu množenja i dijeljenja s 2, ali ne u tim nazivima nego kao „dvostruko više“ i „upola manje“. To prikazuju prva dva zadatka „ $4 + 4$ “ i „ $8 - 4$ “, ostali zadaci govore o lakom pronalasku „susjeda“ udvostručenja i prepolovljenja, kao što su zadaci „ $4 + 5$ “ i „ $9 - 5$ “, čemu se u njemačkoj literaturi također posvećuje velika pozornost, a s ciljem izgradnje kognitivnih shema i strategija.



Slika 13. (Kaufmann i Wessolowski, 2006.:86)

Oduzimanje: Gornji dio slike 14 prikazuje zadatak $13 - 6$ tako da se prvo maknu kružići iz drugog reda pa preostali dio iz prvog reda ($13 - 6 = 13 - 3 - 3$). Donji dio slike prikazuje isti zadatak tako da se kružići u blokovima miču od početka ploče.



Slika 14. Prikaz zadatka 13 – 6

6.4. Uporaba materijala

Rechenschiffchen je materijal koji se može rabiti od predškolske dobi gotovo do kraja osnovne škole, tako da je djeci dobro poznat i s njime sigurno rukuju. Prednost pri usvajanju određenih matematičkih koncepata je ta što ovaj materijal ipak nije konkretni predmet, jednom predstavlja novac, jednom bombone, jednom igračke i sl., pa tako omogućavaju prijenos općih pravila (zbrajanja, oduzimanja, ili što se u zadatku traži) u specifične situacije (Sharma, 2001.).

Materijal je osobito pogodan za rad s djecom u nižim razredima osnovne škole i s djecom sa specifičnim poteškoćama u matematici zbog lakoće rukovanja i mogućnosti zornog prikaza brojeva i operacija u skupu brojeva do 20.

Važnost ovog materijala jest u mogućnosti izgradnje mentalnih modela, kognitivnih struktura. Također, struktura materijala omogućava prepoznavanje i većih brojeva na pogled. Budući da znaju koliko je 5 na Rechenschiffchenu, broj sedam lako je prepoznati jer u tom slučaju moraju prebrojati samo dvije pločice, odnosno dva kružića.

Aktivnosti koje treba provoditi na ovom materijalu su:

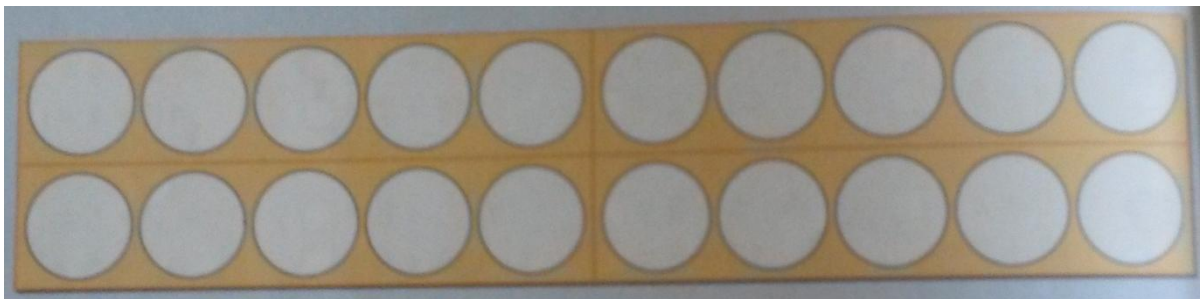
- *Prikazivanje određenog broja* – zadati učenicima da neki broj prikažu na materijalu.
- *Opis prikazanog broja ili računске radnje* – od učenika se traži da objasni prikazani broj ili računsku radnju. Kao što je već rečeno, vrlo je važno da učenici verbaliziraju

ono što je prikazano ili ono što rade. Npr. broj 13 je dva mala okvira od pet i još tri pojedinačna valjka/kružića.

- *Prepoznavanje na pogled* – učenicima kratko pokazati određenu strukturu te pitati: Koliko kružića vidiš? Koliko kružića je bilo na Brodiću?
- *Prekriti dio strukture te pitati*: Koliko kružića vidiš? Koliko kružića ne vidiš? Koliko kružića nedostaje od ... do 5/10/15/20?
- *Postavljati pitanja poput*: Koliko moraš maknuti od 10 da ostane ... kružića?
- *Osmišljavanje zadataka* – vrlo je važno da učenici znaju postaviti nekoliko zadataka s ili bez dane strukture.

6.5. Rechenschiffchen u nastavi matematike u Hrvatskoj

Još 2004. godine u nastavu su matematike materijal Rechenschiffchen pokušali unijeti Bunjevački, Pavleković i Varat kada su predstavili udžbenik za prve razrede osnovne škole pod nazivom *Nina i Jan*. Autorice su korištenjem ovoga materijala uvele operacije zbrajanja i oduzimanja u skupu brojeva do 20.



Slika 15. Rechenschiffchen u udžbeniku Nina i Jan (2004.:84)

Mnoštvo zadataka, osobito u temama računskih radnji preko 10, obrađeno je uz pomoć ovog materijala. Osobito je zanimljivo prikazivanje brojeva i operacija na oba načina, i u redu i u bloku. Također, u udžbeniku je velik broj zadataka u kojima se od učenika traži da samostalno osmisle računsku priču, slože jednakost i postave pločice na polje.

Primjeri zadataka iz ovog udžbenika nalaze se u Prilogu 1.

7. PRIKAZ ISTRAŽIVANJA

Ciljevi

Cilj ovog istraživanja jest utvrditi hoće li uporaba materijala *Rechenschiffchen* odnosno *Zwanzigerfeld mit Wendeplättchen* pridonijeti boljem shvaćanju zbrajanja i oduzimanja s prijelazom desetice u skupu brojeva do 20. Također, cilj je utvrditi hoće li učenici prvog razreda osnovne škole izgraditi kognitivne strukture (*Mentale Modelle*) uz pomoć ovog materijala. Cilj je i razvijati različite strategije, koje upotreba ovog materijala dopušta, pri rješavanju zadataka zbrajanja i oduzimanja u skupu brojeva do 20.

Sudionici

U istraživanju su sudjelovali učenici prvog razreda Osnovne škole Mitnica Vukovar iz Vukovara. Ukupno je sudjelovalo 37 učenika – 19 učenika radne skupine, a 18 učenika kontrolne skupine. Istraživanje sam provela u vremenu od 25. travnja do 12. svibnja 2016. godine. Uzorak ispitanika je neslučajan prigodni (Cohen i sur., 2007.). S ciljem ostvarivanja postavljenih ciljeva s učenicima sam provela sljedeće aktivnosti tijekom nastave matematike: prvi kontrolni test, 5 blic testova – po jedan na početku svakog sata, izvođenje četiri sata, završni kontrolni test.

Metodološki pristup

Kao postupak prikupljanja podataka koristila sam postupak sustavnog promatranja, odnosno sudjelujuće promatranje. Ono je najizravniji i najprirodniji od svih putova prikupljanja podataka u kojima se polazi od empirije odgoja i obrazovanja (Mužić, 1999.:76). Za sudjelujuće promatranje karakteristično je da u njemu promatrač svjesno i sustavno sudjeluje u aktivnosti, interesima i emocijama skupine koju promatra. Podatci koji se njime dobivaju u pravilu su pouzdaniji i istinitiji od onih kod „vanjskog“ promatranja (Mužić, 1999.:79). Budući da pri provođenju ovog postupka nije bilo moguće simultano vođenje bilježaka, na kraju svakog sata zapisala sam svoja opažanja u reflektivni dnevnik. Podatke dobivene kontrolnim testovima i blic testovima potom sam obradila i analizirala. Kvalitativnom analizom obradila sam podatke dobivene u pojedinim zadacima kontrolnog testa, a drugi dio zadataka kao i blic testove obradila sam kvantitativno. Budući da je raznolikost odgovora u kontrolnim ispitima velika, rezultate sam usustavila u kategorije. Kvantitativne podatke prikazala sam u tablicama.

Provedeno istraživanje jest empirijsko, provedeno na „terenu“ odgojno-obrazovne djelatnosti, tj. u školi. Također, istraživanje je longitudinalno jer se podatci prikupljaju dulje vremensko razdoblje. Točnije, ovo je kratkoročno longitudinalno istraživanje (Cohen i sur., 2007.) jer traje tri tjedna.

8. OPIS AKTIVNOSTI

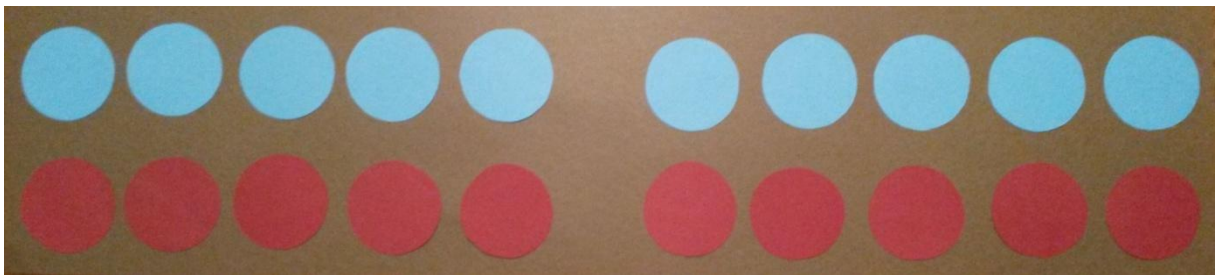
Aktivnost 1. Prvi kontrolni test

Pred učenike postavljamo test (Prilog 2) te im dajemo određeno vrijeme za rješavanje.

Cilj ovog testa jest utvrditi početno znanje i snalaženje s materijalom *Rechenschiffchen*. Rješavanju ispita pristupaju učenici radne i kontrolne skupine.

Aktivnost 2. Upoznavanje s materijalom

Učenici su podijeljeni u parove. Svaki par dobio je jedan *Zwanzigerfeld* i 20 kružića – 10 u plavoj, 10 u crvenoj boji, koji zamjenjuju *Wendeplättchen* (slika 16). Takav materijal, ali u većem obliku, postavljen je na ploču kao demonstracijski model.



Slika 16. Zwanzigerfeld izrađen za provedbu istraživanja

Učenici su se najprije upoznavali s materijalom.

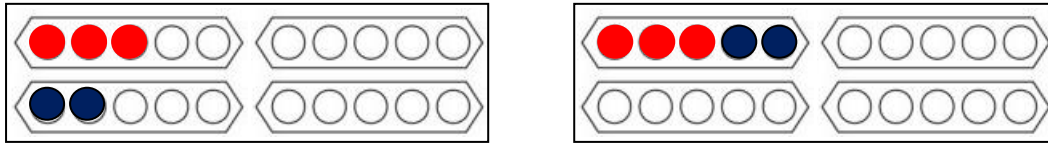
Učenicima je objašnjen fizički izgled materijala – da je to ploča od dvadeset polja, da su dobili i dvadeset kružića (10 u plavoj, 10 u crvenoj boji), da su polja na ploči raspoređena u dva reda, da u svakom redu ima deset kružića, a u svakom redu da je odvojeno 5. i 6. polje, dakle u svakom redu ima dvije skupine od pet polja.

Nakon fizičkog upoznavanja s materijalom pred učenike je postavljen zadatak: broj 4 prikazati na Brodiću. Zadatak provoditelja aktivnosti jest pratiti na koji način će učenici postaviti kružiće (red, blok ili nestrukturirano) i koje boje će koristiti (hoće li samo plavu ili samo crvenu ili obje). Isto se ponovi s brojem 7. Nakon što su učenici samostalno postavili kružiće valja im sugerirati da jedan broj prikažu u jednoj boji.

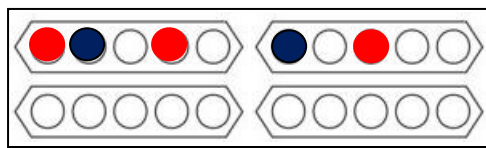
Sljedeći zadatak je prikazati izraz $3 + 2$ na Brodiću. Učenike treba podsjetiti na dogovor da jedan broj prikazujemo jednom bojom, pa tako broj 3 prikažu kružićima jedne boje, a broj 2

kružićima druge boje, npr. 3 crvena i 2 plava kružića (ili obrnuto, ali je važno u početnim satima koristiti jedan redosljed boja).

Zadatak provoditelja aktivnosti jest pratiti na koji će način učenici postaviti kružiće. Moguća poželjna rješenja su:



Također, moguće rješenje su nestrukturirano posloženi kružići, npr.:



Aktivnost 3. Blic test

Na početku svakog sljedećeg sata matematike učenici će pristupiti rješavanju blic testa. Blic testovi se odvijaju na sljedeći način: učenici će dobiti komad papirića na vrhu kojeg moraju napisati svoje ime. Provoditelj aktivnosti stoji frontalno, ispred učenika te u rukama ima 6 kartica. Na svakoj kartici nalazi se jedan prikaz kružića na Brodiću (Prilog 4). Provoditelj aktivnosti podiže jednu karticu i pokazuje ju nekoliko sekundi te traži od učenika da zapišu koliko kružića su vidjeli.

Cilj je ove aktivnosti razvijati prepoznavanje broja na pogled, tj. razvijati unutarnje strukture (*Mentale Modelle*) koliko je to 3, 5, 9, 14, itd. na hrpi. Razvijanjem kognitivnih slika djeca će biti u stanju pogledom na predmete reći koliko ih je ne brojeći. Naravno, manje brojeve (3, 4, 5) i broj 10 djeca će biti sposobna prepoznati odmah, a one veće gradit će uz pomoć naučenih struktura (5 i 10).

Redni broj kartica na:

- prvom blic testu: 1, 2, 3, 4, 5, 6
- drugom blic testu: 5, 6, 7, 8, 9, 10
- trećem blic testu: 1, 3, 5, 7, 9, 10
- četvrtom blic testu: 14, 13, 12, 11, 15, 16

- petom blic testu: 10, 8, 13, 14, 15, 16

Aktivnost 4. Nastavna jedinica Zbrajanje (7 + 5)

Prva jedinica koju ćemo obraditi uz pomoć materijala jest iz područja zbrajanja s prijelazom desetice „7 + 5“. Ova tema vrlo je važna jer će dati mnoštvo podataka o načinu na koji djeca slažu svoje strukture – u red ili blok, kako shvaćaju operaciju zbrajanja, a također i je li ovakvo strukturiranje lakši način brojenja (učinkovitija strategija) ili ipak daju prednost prstima ili nekoj od dosada naučenih strategija. Provoditelj aktivnosti djeci treba predstaviti oba načina prikaza računske radnje kako bi samostalno odabrali način koji im više odgovara, tj. uz koji lakše dolaze do rezultata.

Nekoliko zadataka provoditelj aktivnosti provodi frontalno dok učenici isto rade na svojim materijalima, kasnije će učenici raditi samostalno, tj. u parovima, a učitelj će nakon samostalnih pokušaja rješenje prikazati i na ploči. Neki od zadataka za obradu: 7 + 5, 7 + 8, 7 + 6, 8 + 6, 9 + 3.

Zapis na ploči i u bilježnicama bit će pomoću rastavljanja, jer je tako objašnjeno učenicima u udžbeniku. Npr.

$$\begin{aligned}7 + 5 &= 7 + 3 + 2 \\ &= 10 + 2 \\ &= 12\end{aligned}$$

No, treba im, kad god je to moguće, ukazati i na neku drugu strategiju rješavanja, primjerice u zadatku 7 + 8. 7 + 8 možemo zapisati i kao 7 + 7 („dvostruko više“) + 1, a to je osobito zgodno prikazati na materijalu – u blok prikazu. Uz ovu temu uslijedit će i sat vježbanja.

Aktivnost 5. Nastavna jedinica Oduzimanje (12 – 5)

Druga nastavna jedinica koju ćemo obraditi uz pomoć Brodića je oduzimanje s prijelazom desetice (12 – 5). Za pretpostaviti je da će učenicima do ove teme nastavu s ovim materijalom već biti lakše pratiti, te će i sami imati ideja kako određeni zadatak riješiti.

Prije podjele materijala potrebno je učenicima presložiti kružice koje imaju, tj. svakom paru dati dvadeset kružica u istoj boji. Za operaciju oduzimanja nisu potrebne obje boje jer postupak ide tako da postavimo određeni broj kružica – u vrijednosti umanjenika (jedan broj – jedna boja) i uklanjamo kružice koji predstavljaju vrijednost umanjitelja.

Postupak obrade teče kao i kod teme zbrajanja: prvo se zadaci rješavaju uz vodstvo provoditelja aktivnosti, a zatim učenici samostalno rješavaju uz kasniju frontalnu provjeru rezultata. Neki od zadataka za obradu: $12 - 5$, $13 - 7$, $12 - 6$, $15 - 8$, $14 - 9$.

Zapis na ploči i u bilježnicama biti će pomoću rastavljanja, jer je tako objašnjeno učenicima u udžbeniku. Npr.

$$\begin{aligned}12 - 5 &= 12 - 2 - 3 \\ &= 10 - 3 \\ &= 7\end{aligned}$$

No, kad god je moguće treba ukazati na neku drugu strategiju rješavanja, poput: $12 - 6$ učenici već trebaju znati napamet tako da mogu pristupiti strategiji dosjećanja; $12 - 5$ može se povezati sa prethodnim zadatkom, tj. učenici znaju da je $12 - 6 = 6$ i dodaju 1 jer je umanjitelj 5, a ne 6: $12 - 5 = 12 - 6 + 1 = 6 + 1 = 7$. Uz ovu temu uslijedit će i sat vježbanja.

Aktivnost 6. Završni kontrolni test

Nakon provedenih svih aktivnosti slijedi završni kontrolni test po uzoru na prvi kontrolni test.

Pred učenike postavljamo test (Prilog 3) te im dajemo određeno vrijeme za rješavanje.

Cilj ovog testa jest ustvrditi kako su se učenici snašli u rješavanju zadataka uz pomoć Brodića. Dobiveni rezultati usporedit će se s rezultatima prvog kontrolnog testa, a usporedit će se međusobno i rezultati radne i kontrolne skupine.

9. REZULTATI I RASPRAVA

Prvi kontrolni test

Rješavanju prvog kontrolnog testa (Prilog 2) pristupili su svi ispitanici. Kontrolni ispiti sastavljeni su korištenjem njemačkih udžbenika matematike za 1. razred osnovne škole autora Bauer i Maurach (2010) i zbirci zadataka autora Callies (2008).

Prikaz broja

U drugom zadatku prvog kontrolnog testa bilo je potrebno broj 5 prikazati na dva različita načina. Dobiveni su sljedeći rezultati:

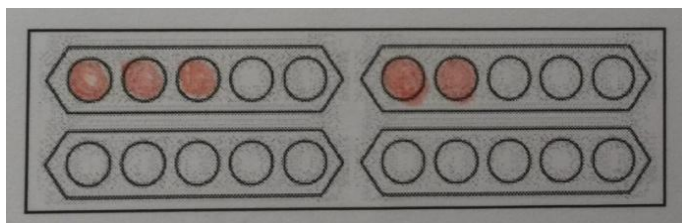
Tablica 1. Prikaz rezultata drugog zadatka prvog kontrolnog testa

Skupina	Slaganje	Strukturiran prikaz, prvih pet kružića	Strukturiran prikaz, ali ne prvih pet kružića	Prikaz u bloku	Nestrukturiran prikaz	Netočno riješen zadatak
radna	1.	14	3	0	0	2
	2.	2	11	0	3	3
kontrolna	1.	16	0	0	0	2
	2.	0	6 (2 + 4)	1	9	2
Ukupno po kategoriji		52		1	12	9

Pri prvom slaganju strukture broja 5, 14 učenika radne i 16 učenika kontrolne skupine strukturirano je obojio kružice i to prvih pet kružića. Troje učenika radne skupine strukturirano je obojilo kružice, ali ne prvih 5. U sva tri slučaja bilo je to također pet kružića u nizu, ali na nekom drugom mjestu na materijalu. Nestrukturirano niti jedan učenik nije obojio strukturu, a četiri učenika nije točno riješilo zadatak, po dva u svakoj skupini.

Pri drugom slaganju strukture broja 5, tj. različitom prikazu broja 5 od onog postavljenog u prvom slaganju, 2 učenika radne skupine strukturirano je obojilo prvih pet kružića. To su dva od tri učenika koji u prvom slaganju nisu obojili prvih pet kružića.

Strukturirano, ali ne prvih pet kružića je obojilo 11 učenika radne i 6 učenika kontrolne skupine. Zanimljivi su rezultati dobiveni u kontrolnoj skupini, gdje je 2 učenika obojilo pet kružića u nizu na nekom drugom mjestu, a njih 4 je broj pet prikazalo kao $3 + 2$ (slika 17). Ovakav prikaz pokazuje da učenik ima usvojen aspekt broja kao odnosa, broj 5 zamišlja kao $3 + 2$.



Slika 17. Prikaz rješenja drugog zadatka pri slaganju strukture na drugačiji način od načina napravljenog u prvom slaganju

Ovoga puta 12 se učenika priklonilo nestrukturiranom prikazu, 3 učenika radne i 9 učenika kontrolne skupine. Slično kao i u prvom slaganju, 3 učenika radne i 2 učenika kontrolne skupine zadatak nisu riješili na ispravan način.

Jedan učenik kontrolne skupine u drugom je slaganju broj pet prikazao u blok prikazu.

U oba slaganja, broj pet strukturirano u redu prikazan je 52 puta (70,3% slaganja strukturiranih u redu). Sljedeći rezultat pokazuje nestrukturirani prikaz, koji je 12 puta prikazan (16,2% nestrukturiranih prikaza). Učenici se, dakle, pri prikazu jednog broja više priklanjaju slaganju u red.

Prikaz računske radnje zbrajanja

Treći i četvrti zadatak tiču se prikaza dva broja na istoj strukturi, što ukazuje na računsku radnju zbrajanja. U trećem zadatku trebalo je obojiti 6 krugova crvenom i 3 plavom bojom. Kategorije u koje sam svrstala rezultate su: prikaz u redu, prikaz u bloku, nestrukturirani prikaz i netočno riješen zadatak. Dobiveni rezultati su sljedeći:

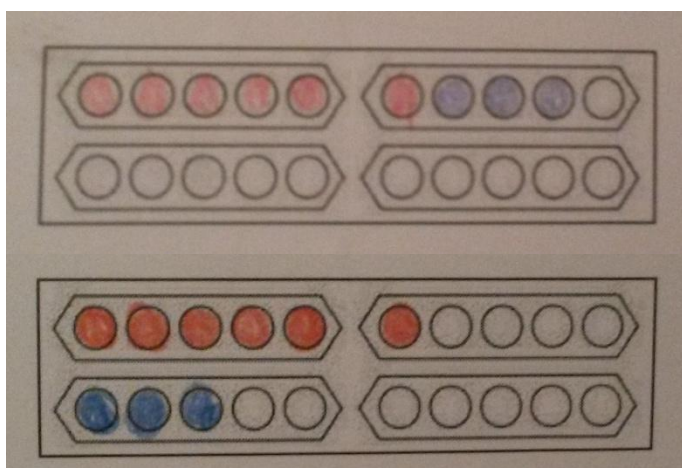
Tablica 2. Prikaz rezultata trećeg zadatka prvog kontrolnog testa

Skupina	Prikaz u redu	Prikaz u bloku	Nestrukturirani prikaz	Netočno riješen zadatak
radna	9 (4 + 5)	3 (2 + 1)	5	2

kontrolna	4 (1 + 3)	12 (7 + 5)	2	0
Ukupno po kategoriji	13	15	7	2

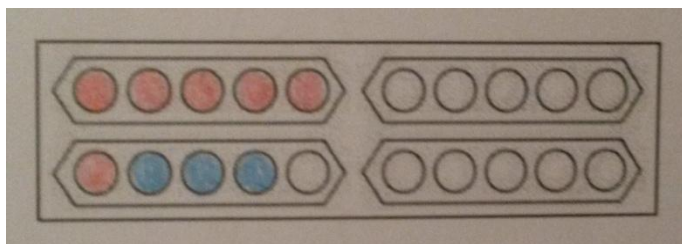
Učenici radne skupine više su se priklonili prikazu u redu, a učenici kontrolne skupine prikazu u bloku.

Promatrajući prikaz u redu, 5 je učenika prikazalo devet kružića u redu onako kako bi izgledao zapis zbrajanja broja 6 i 3 u redu (slika 18, gornji dio), od toga 4 učenika radne i 1 učenik kontrolne skupine. Pet učenika radne te tri učenika kontrolne skupine prikazali su brojeve u odvojenim redovima (slika 18, donji dio). Donji prikaz odgovara prikazu u drugom zadatku; svaki od brojeva ovi ispitanici vide odvojeno, ne dovode ih u vezu zbrajanja, dok učenici koji su koristili gornju strukturu vide vezu između brojeva i pokazuju dobro slijeđenje uputa.



Slika 18. Prikaz 6 crvena i 3 plava kružića na Zwanzigerfeld-u

Nekoj vrsti blok zapisa priklonilo se 15 učenika, od čega veći broj opet iz kontrolne skupine, njih 12. Prvi broj u zagradi označava učenike koji su obojili šest crvenih kružića na lijevoj strani materijala pa tri plava na desnoj strani, a drugi broj učenike koji su obojili kružiće kao na slici 19. Ovi učenici *Zwanzigerfeld* vide kao dva bloka po deset kružića.



Slika 19. Prikaz 6 crvena i 3 plava kružića na Zwanzigerfeld-u u bloku

Nestrukturirani je prikaz koristilo 7 učenika, od toga 5 iz radne skupine. Dva učenika zadatak nije riješilo na ispravan način. Učenici koji su koristili nestrukturirani prikaz bojali su kružice nasumično.

Četvrti je zadatak od učenika zahtijevao da prikažu 6 crvenih pa 7 plavih kružića na strukturi, a to je isto vodilo operaciji zbrajanja. Ovoga je puta drugi pribrojnik bio veći od prvog. Dobiveni rezultati su:

Tablica 3. Prikaz rezultata četvrtog zadatka prvog kontrolnog testa

Skupina	Prikaz u redu	Prikaz u bloku	Nestrukturirani prikaz	Netočno riješen zadatak
radna	11 (4 + 7)	3 (1 + 2)	4	1
kontrolna	6 (2 + 4)	10 (8 + 2)	1	1
Ukupno po kategoriji	17	13	5	2

U ovom zadatku rezultati idu u korist zapisu u redu (45,95%) u odnosu na zapis u bloku (35,14%). Nestrukturiranih je zapisa samo 5, a ovaj zadatak nije točno riješilo dvoje učenika. Pri zapisu u redu i dalje je više učenika koji svaki od brojeva prikazuju u drugom redu, a pri zapisu u bloku više je onih koji materijal dijele na lijevi i desni blok pa u blokove, ali odvojene, zapisuju brojeve.

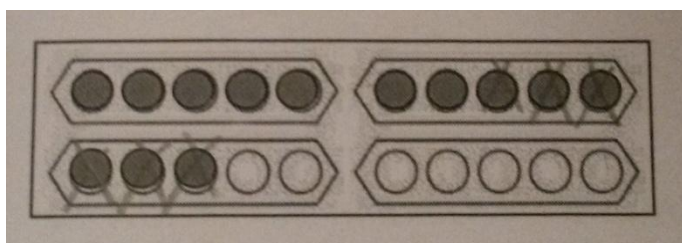
Prikaz računske radnje oduzimanja

U petom su zadatku učenici na prikazanoj strukturi trebali prekriziti odgovarajući broj obojenih kružića da ih ostane sedam obojano. Ovaj zadatak vodi računskoj radnji oduzimanja. U tablici 4 su dani rezultati.

Tablica 4. Prikaz rezultata petog zadatka prvog kontrolnog testa

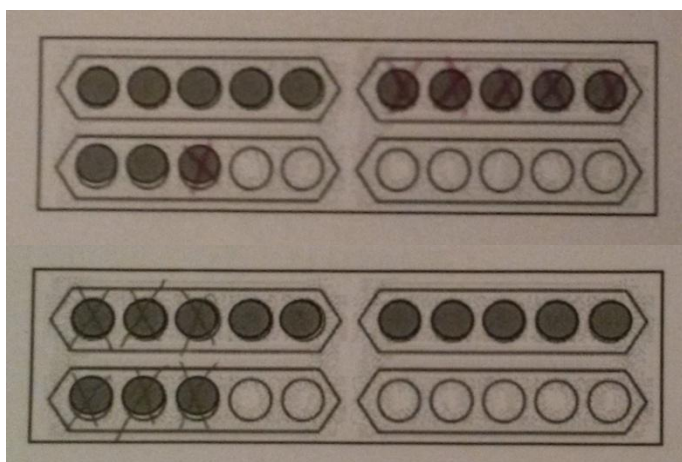
skupina	Prikaz u redu	Prikaz u bloku	Nestrukturirani prikaz	Netočno riješen zadatak
radna	8	5 (2 + 3)	1	5
kontrolna	3 (2 + 1)	2	0	13
Ukupno po kategoriji	11	7	1	18

Prikaz u redu u ovom slučaju znači da su ispitanici križali krugove prvo u donjem redu pa u gornjem s desna na lijevo (slika 20). Jedan ispitanik kontrolne skupine prekrizio je 6 kružića od početka, dakle s lijeva na desno.



Slika 20. Prikaz petog zadatka u redu

Prikaz u bloku koristilo je 7 učenika, 5 učenika radne i 2 učenika kontrolne skupine, od kojih su prepoznatljive dvije vrste struktura vidljive na slici 21.



Slika 21. Prikaz petog zadatka u bloku

Gornji je prikaz pomalo zbunjujući, ali ako razmislimo o objašnjenju na koji način su ispitanici, koji prikazuju u blok, zamislili materijal, vidljivo je da je riječ o blok strukturi. Ako zamislimo uspravnu crtu po sredini materijala postoje lijeva i desna strana. Učenici su prvo

križali desnu stranu, tj. desni blok, a zatim su redom nastavili križati kružice u lijevom bloku. Ovakav bi prikaz mogao biti neka vrsta miješane strukture.

Osobito je zanimljiv donji prikaz. Učenici su sposobni broj šest vidjeti u blok strukturi, tj. kao $3 + 3$.

Jedan učenik radne skupine sve je navedene zadatke neuspješno riješio, što bi moglo ukazivati na postojanje nekih specifičnih poteškoća u učenju. Uz tog učenika, još je četiri učenika koji s određenim poteškoćama rješavaju zadatke. U nastavku će biti praćeni.

Rezultati blic testova

Blic testovi su provedeni samo u radnoj skupini. U tablici 5 nalaze se rezultati dobiveni blic testovima, kao i broj točnih odgovora, prosjeci i postotak za svakog učenika individualno, te prosječna vrijednost za svaki blic test pojedinačno. IR je kratica za „individualni rezultati“, a „-“ se nalazi na mjestu gdje neki učenik nije bio na nastavi.

Tablica 5. Prikaz rezultata blic testova

	1. blic test	2. blic test	3. blic test	4. blic test	5. blic test	IR - broj točnih	IR - prosjek	IR - postotak
učenik 1	5	5	4	1	3	18	3,6	60
učenik 2	6	5	6	3	4	24	4,8	80
učenik 3	5	6	6	3	5	25	5,0	83
učenik 4	6	6	6	5	6	29	5,8	97
učenik 5	6	6	-	3	-	15	5,0	83
učenik 6	5	5	5	2	5	22	4,4	73
učenik 7	6	5	6	6	6	29	5,8	97
učenik 8	0	5	6	3	2	16	3,2	53
učenik 9	5	6	6	2	4	23	4,6	77
učenik 10	6	6	6	3	6	27	5,4	90
učenik 11	6	6	6	6	5	29	5,8	97
učenik 12	6	5	3	4	6	24	4,8	80
učenik 13	6	6	5	3	5	25	5,0	83
učenik 14	5	5	6	4	5	25	5,0	83
učenik 15	5	5	4	3	2	19	3,8	63

učenik 16	5	4	6	2	4	21	4,2	70
učenik 17	3	3	3	2	2	13	2,6	43
učenik 18	3	5	4	-	-	12	4,0	67
učenik 19	5	6	6	2	3	22	4,4	73
prosječna vrijednost	5	5,26	5,22	3,17	4,29	22	4,6	73

Na prvom blic testu prosječna je vrijednost točnih odgovora 5, što je vrlo visok rezultat za prvi susret s ovakvim načinom rada. Učenici su vrlo brzo shvatili strukturu od 5 i 10 kružića. Najbolji rezultat učenici su postigli na drugom blic testu, a najlošiji rezultat na četvrtom blic testu gdje je prosječna vrijednost točnih odgovora bila 3. Razlog zbog kojeg su rezultati na četvrtom blic testu bili niži jest zbog toga što su kartice bile znatno teže nego u prijašnjim blic testovima. Učenicima je bilo teško prepoznati veće strukture, tj. nisu bili spremni na to te su negodovali. Već sljedeći put, na petom blic testu, rezultati su opet bili dobri.

Učenici 4, 7 i 11 imali su u svim blic testovima samo jedan netočan odgovor, dakle 29 točnih. Najniži individualni postotak od 43% riješenosti svih pet blic testova ima učenik 17, to je 13 točnih odgovora od 30 ukupno. Riječ je o učeniku koji i inače pokazuje poteškoće u usvajanju matematičkih sadržaja.

Vrlo je zanimljiv učenik 5 koji pokazuje određene poteškoće u učenju. Iako dva puta nije bio na nastavi, u prva dva blic testa pokazuje iznimne rezultate, što može ukazivati na to da ima dobru sposobnost vizualizacije. Većih je problema imao u popunjavanju kontrolnih ispita, ali u blic testovima je bio vrlo uspješan. Čak je i na četvrtom blic testu pokazao prosječne rezultate. Zanimljiv je i učenik 8 koji također ima određenih poteškoća u učenju općenito. Na prvom blic testu ostvario je nula bodova, ali se kasnije izuzetno dobro snašao. Pri većim je strukturama imao problema.

U prosjeku su učenici imali 22 točna odgovora, što je između 4 i 5 točnih odgovora po blic testu, odnosno 73%.

Završni kontrolni test

Rješavanju završnog kontrolnog testa pristupilo je 36 učenika, jedan učenik iz radne skupine je zbog bolesti izostao s nastave taj dan. Kontrolni su ispiti sastavljeni prema

zadacima iz njemačkih udžbenika matematike za 1. razred osnovne škole autora Bauer i Maurach (2010.) i zbirci za vježbanje autora Callies (2008.).

Prikaz broja

U prvom zadatku završnog kontrolnog testa bilo je potrebno sedam kružića obojiti crvenom bojom.

Tablica 6. Prikaz rezultata prvog zadatak završnog kontrolnog testa

Skupina	Prikaz u redu	Prikaz u bloku (prvo lijevi blok pa desni)	Nestrukturiran prikaz	Netočno riješen zadatak
radna	17	1	0	0
kontrolna	8	10	0	0
Ukupno po kategoriji	25	11	0	0

Iz tablice 6 vidljivo je da je 17 učenika radne skupine sedam kružića obojilo crveno u redu, dok je u kontrolnoj skupini taj broj niži, 8 učenika prikazalo je broj sedam u redu. Rezultat velikog broja prikaza u redu radne skupine jest rad na nastavi gdje je veća pozornost posvećena slaganju u red kao načinu koji se češće koristi u udžbenicima.

Jedan je učenik radne skupine prikazao broj sedam u bloku, a 10 učenika kontrolne skupine učinilo je isto. Prikaz u bloku nije klasični prikaz kakav bi u bloku trebao izgledati, nego kako piše u tablici, učenici prvo popunjavaju lijevi pa desni blok.

Nestrukturiran se prikaz ovoga puta nije pojavio, a zadatak su shvatili svi učenici.

Prikaz u redu opet je češći, 70% učenika se odlučilo za ovakav prikaz, dok 30% učenika koristi prikaz u bloku, a od toga 91% učenici kontrolne skupine.

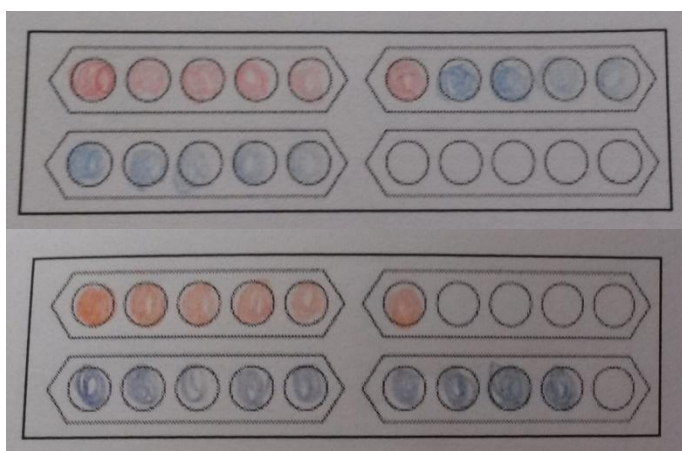
Prikaz operacije zbrajanja

U drugom je zadatku završnog kontrolnog testa bilo potrebno obojiti 6 kružića crvenom, pa 9 plavom bojom. Ovaj zadatak ukazuje na operaciju zbrajanja.

Tablica 7. Prikaz rezultata drugog zadatak završnog kontrolnog testa

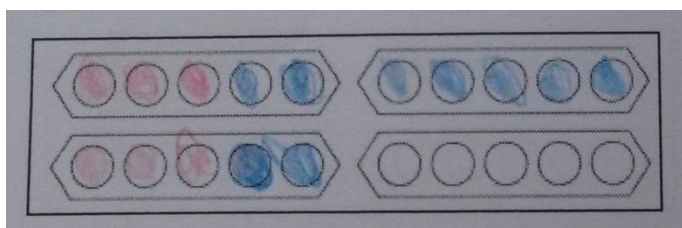
Skupina	Prikaz u redu	Prikaz u bloku	Kombinirani prikaz	Nestrukturirani prikaz	Netočno riješen zadatak
radna	15 (13 + 2)	0	1	1	1
kontrolna	8 (3 + 5)	10 (4 + 6)	0	0	0
Ukupno po kategoriji	23	10	1	1	1

Zadatak „6 + 9“ 15 je učenika radne skupine prikazalo u redu, od kojih 13 popunjavajući prvo gornji red, pa donji, nastavljajući jedan za drugim (slika 22, gornji dio), a dvoje je prikazalo šest i devet kao samostalne odvojene strukture (slika 22, donji dio). Ovi rezultati upućuju na to da su učenici radne skupine ispravno shvatili prikaz operacije zbrajanja na materijalu. Kod učenika kontrolne skupine broj je zapisa u redu manji, a odvojeni zapis dvaju brojeva češće se javlja od popunjavanja jednog reda.



Slika 22. Prikaz 6 i 9 kružića u redu na dva načina

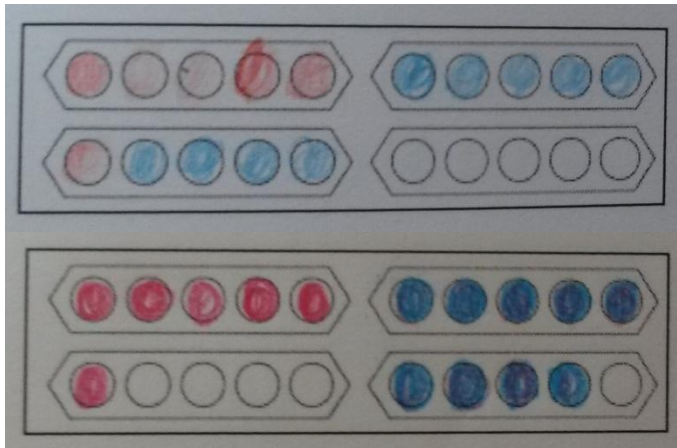
Kombinirani prikaz obojio je jedan ispitanik, čiji odgovor izgleda ovako:



Slika 23. Kombinirani prikaz brojeva 6 i 9

Promatrajući ovu strukturu vidljivo je da je učenik prvo postavio šest crvenih kružića u blok, zatim je nastavio popunjavati lijevi blok drugim brojem. Kada je popunio, ostalo mu je pet plavih kružića, koje je obojio u redu.

Kontrolna je skupina i ove zadatke riješila više uz pomoć prikaza u bloku. Sada dolazi do razlike u ovim dvjema skupinama. Četiri ispitanika odlučilo se za prikaz kao na slici 24 (gornji dio), a šest za prikaz kao na donjem dijelu slike 24.



Slika 24. Prikaz brojeva 6 i 9 u blok strukturi

U trećem i četvrtom zadatku ispitanici su trebali samostalno osmisliti zadatke tako da u trećem zadatku zbroj bude 16, a u četvrtom zadatku razlika 14, popuniti tablicu te prikazati strukturu na *Zwanzigerfeld-u*.

Zbrajanje

Tablica 8. Prikaz rezultata trećeg zadatka završnog kontrolnog testa

Skupina	Prikaz u redu	Prikaz u bloku	Riješen zadatak, ali bez prikaza strukture	Netočno riješen zadatak
radna	11 (8 + 3)	1	3	3
kontrolna	11 (6 + 5)	1	5	1
Ukupno po kategoriji	22	2	8	4

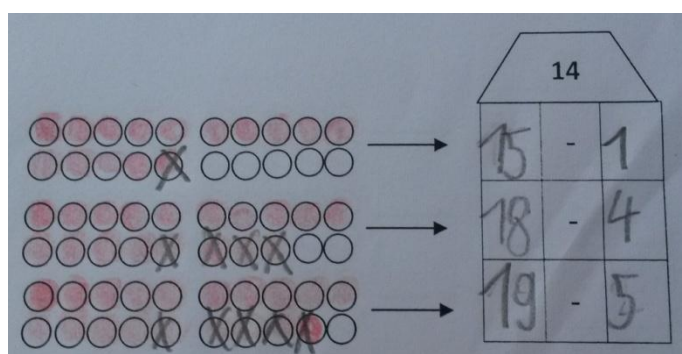
Rezultati objiju skupina približno su jednaki. To je možda rezultat danog primjera, gdje su i učenici kontrolne skupine imali priliku vidjeti slaganje pribrojnika u red.

Oduzimanje

Tablica 9. Prikaz rezultata četvrtog zadatka završnog kontrolnog testa

Skupina	Prikaz u redu	Prikaz u bloku	Riješen zadatak, ali bez prikaza strukture	Netočno riješen zadatak	Nije riješeno
radna	4	0	10	2	2
kontrolna	0	0	17	0	1
Ukupno po kategoriji	4	0	27	2	3

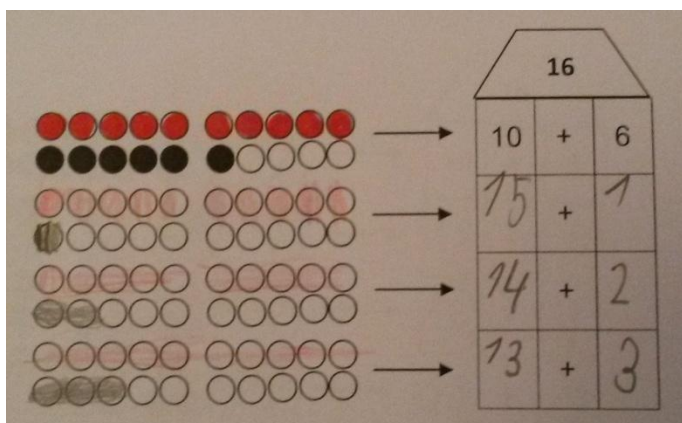
U ovom zadatku nije dan primjer, pa je moguće da su i zbog toga rezultati lošiji. Prikaz rješenja zadataka 4 slaganjem u red, vidljiv je kod ispitanika radne skupine (slika 25).



Slika 25. Prikaz oduzimanja

Četiri učenika radne skupine nisu točno ili uopće riješili zadatak. To su spomenuti učenici sa specifičnim poteškoćama u učenju. Učenik koji je sve zadatke prvog kontrolnog testa netočno riješio sada je riješio zadatak točno, ali bez prikaza strukture na materijalu.

Neshvaćanje prikaza na Zwanzigerfeld-u, ali točno rješavanje zadataka i popunjavanja kućice, u velikom je broju vidljiv kod ispitanika kontrolne skupine. Čak njih 17 od 18 je ovako riješilo zadatak, a jedan preostali učenik taj zadatak nije ni riješio. Na slici 26 vidljiv je jedan takav zapis. Iako točno popunjava tablicu, zapis na materijalu uopće ne razumije.



Slika 26. Neshvaćanje prikaza na Zwanzigerfeld-u, ali točno rješavanje zadataka

Što se tiče prikaza broja, uspoređujući rezultate prvog i završnog kontrolnog testa, broj nestrukturiranih prikaza uvelike se smanjio, točnije u završnom kontrolnom niti jedan ispitanik nije broj prikazao nestrukturirano. I u početnom i završnom kontrolnom učenci radne skupine teže prikazu broja u redu, što se na kraju podučavanja od njih i očekivalo, a učenci kontrolne skupine prikazu u bloku. Kod zadataka zbrajanja rezultati su slični. Kod zadataka oduzimanja pomoću ovog materijala učenci su imali određene poteškoće. No, ipak ima učenika radne skupine koji su ovaj zadatak riješili na poželjan način. Učenci radne skupine koji pokazuju specifične teškoće u učenju i u prvom i u završnom kontrolnom testu pokazuju nerazumijevanje određenih zadataka.

Vrlo dobre rezultate pokazali su blic testovi koji zahtijevaju od učenika prepoznavanje brojeva na pogled. Učenci su se u ovim aktivnostima vrlo dobro snašli, a dobri rezultati pokazuju da je materijal pogodan za razumijevanje brojeva te određivanje količine.

10. ZAKLJUČAK

U svakodnevici je mnoštvo situacija koje imaju matematički sadržaj. Te situacije potrebno je uvijek iznova opisivati i matematički interpretirati kako bi djeca matematiku shvatila kao dio života, a ne samo kao školski predmet (Kaufmann i Wessolowski, 2006.). Iako većina djece pri dolasku u školu već zna brojati, često je brojenje na razini je recitacije, tj. napamet naučenog niza riječi. Kako bismo rekli da neko dijete zna brojati, potrebno je poznavanje brojeva u njihovim različitim aspektima, a oni su opisani u ovome radu.

Odabir strategije, koju dijete koristi pri rješavanju zadataka, ovisi o djetetovom poznavanju različitih strategija i o obilježjima zadataka. Pod pojmom strategije podrazumijeva se namjerni postupak pomoću kojeg se želi ostvariti neki cilj, odnosno riješiti problem (Siegler i Jenkins, 1989., prema Vlahović-Štetić i Vizek Vidović, 1998.). Pri rješavanju zadataka djeca i odrasli ne koriste samo jednu strategiju, već više njih.

Budući da se većina djece pri dolasku u školu nalazi u fazi konkretnih operacija prema teoriji kognitivnog razvoja Jeana Piageta, razvoj pojma broja i strategija zbrajanja i oduzimanja mora biti uz pomoć konkretnog materijala. Rukovanje materijalom nastavak je na dječju igru i sredstvo stvaranja kognitivnih struktura potrebnih za operacije zbrajanja i oduzimanja. Konkretni materijali važni su za stvaranje matematičkih pojmova jer se misaone sheme oblikuju kroz rukovanje predmetima, tj. motoričkim putem (Vlahović-Štetić i Vizek Vidović, 1998.).

Uporaba materijala *Zwanzigerfeld* pokazala se korisnom u pogledu izgradnje kognitivnih modela. Nedvojbeno je da su i učenici radne i učenici kontrolne skupine naučili zbrajati u skupu brojeva do 20, ali je kod učenika radne skupine vidljivo lakše prepoznavanje i postavljanje zadanih struktura (brojeva i računskih operacija). U radu s učenicima sa specifičnim poteškoćama u matematici (bilo slabijeg razumijevanja, bilo teškoća u učenju) može se primijetiti vrlo dobra mogućnost prepoznavanja struktura brojeva na pogled i konkretno postavljanje materijala, iako s crtanjem istog i zamišljanjem imaju problema. Učenici su pokazali vrlo dobru mogućnost prepoznavanja na pogled manjih brojeva i struktura (1, 2, 3, 4, 5, 10), te građenja većih struktura uz pomoć manjih jednostavnijih. Materijal je poželjno početi koristiti barem od početka prvog razreda osnovne škole. Materijal omogućuje razvoj različitih strategija brojenja, zbrajanja i oduzimanja i vodi djecu smislenijem računanju.

Sve rečeno u ovom diplomskome radu u skladu je s četiri temeljna načela učenja prema Reysu (1971., prema Sharma, 2001.:124):

1. Učenje se temelji na iskustvu
2. Učenje putem osjetila najvažnija je vrsta učenja
3. Učenje napreduje od konkretnog prema apstraktnom
4. Učenje zahtijeva aktivno sudjelovanje učenika.

Potrebno je učenicima pružiti priliku da rukuju konkretnim predmetima i samostalno izgrađuju vlastite strategije računanja. Iskustveno učenje je dugoročno učenje.

11. LITERATURA

1. Bauer, R., Maurach, J. (2010.). *Einstern, Mathematik für Grundschul Kinder*. Berlin: Cornelsen Verlag.
2. Bunjevački, L., Pavleković, M., Varat, D. (2004.). *Nina i Jan: Matematika 1, udžbenik za 1. razred osnovne škole*. Zagreb: Neodidacta.
3. Bunjevački, L., Pavleković, M., Varat, D. (2004.). *Nina i Jan: Matematika 1, radna bilježnica za 1. razred osnovne škole*. Zagreb: Neodidacta.
4. Callies, F. E. (2008.). *Das Grundschul-Superbuch*. München: Franzis Verlag.
5. Cohen, L., Manion, L., Morrison, K. (2007.). *Metode istraživanja u obrazovanju*. Jastrebarsko: Naklada Slap.
6. Gelman, R., Gallistel, C. R. (1986.). *The child's understanding of number*. Cambridge: Harvard University Press.
7. Kaufmann, S., Wessolowski, S. (2006.). *Rechenstörungen: Diagnose und Förderbausteine*. Seelze: Kallmeyer Verlag.
8. Liebeck, P. (1984.). *Kako djeca uče matematiku*. Zagreb: Educa.
9. Miklec, D., Jakovljević Rogić, S., Prtajin, G. (2014.). *Moj sretni broj: udžbenik matematike u prvom razredu osnovne škole*. Zagreb: Školska knjiga.
10. Miklec, D., Jakovljević Rogić, S., Prtajin, G. (2014.). *Moj sretni broj: radna bilježnica za matematiku u prvom razredu osnovne škole*. Zagreb: Školska knjiga.
11. Mužić, V. (1999.). *Uvod u metodologiju istraživanja odgoja i obrazovanja*. Zagreb: Educa.
12. Pavlin-Bernardić, N. (2006.). Modeli dječjeg odabira strategija rješavanja aritmetičkih zadataka. *Suvremena psihologija*, 9 (1/2006.), 47-61.
13. Pädagogische Hochschule Karlsruhe (2016.). *DiLeMa²: Didaktische Lernmaterialien Mathematik Primarstufe*. Karlsruhe: Institut für Mathematik und Informatik.
14. Sharma, M. C. (2001.). *Matematika bez suza – kako pomoći djetetu s teškoćama u učenju matematike*. Buševac: Ostvarenje.
15. Vlahović-Štetić, V., Nadilo, M., Pavlin-Bernardić, N. (2006.). Brojenje: stječemo li prije načela ili vještinu. *Suvremena psihologija*, 9 (1/2006.), 21-34.
16. Vlahović-Štetić, V., Vizek Vidović, V. (1998.). *Kladim se da možeš... – psihološki aspekti početnog poučavanja matematike*. Zagreb: Udruga roditelja Korak po korak.

17. Von Aster, M., Holger Lorenz, J. (2013.). *Rechenstörungen bei Kindern: Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

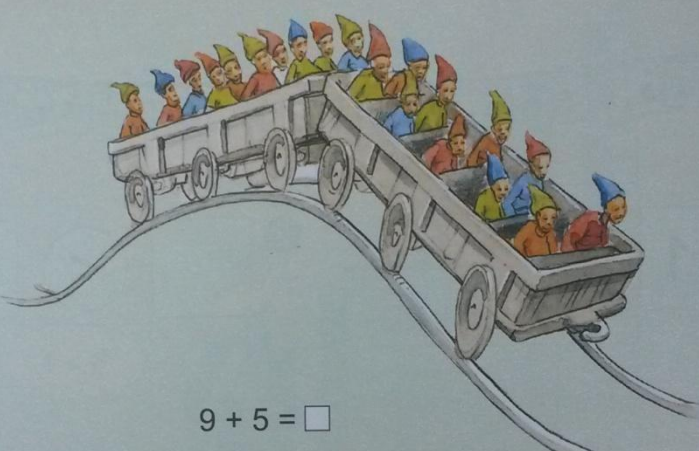
Mrežno dostupni radovi

18. Marenić, Z. (2009.). *Teorijski okvir razvoja matematičkih pojmova u dječjem vrtiću. Metodika* 18, 10 (1(2009.)), 129-141. Pribavljeno 12.4.2016., sa <http://hrcak.srce.hr/40821?lang=en>
19. Vlahović-Štetić, V., Kovačić, S. (1997.). *Kognitivna reprezentacija brojeva u djece različite dobi. Društvena istraživanja: journal for general social issues*, 8 (4/1999.), 563-577. Pribavljeno 19.1.2016., sa http://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=31903
20. Gliha, M. (2004.). *Diplomski rad: Osnovni principi zbrajanja kod predškolske djece i učenika prvog razreda osnovne škole*. Neobjavljeni rad. Pribavljeno 2.4.2016., sa <https://bib.irb.hr/datoteka/213673.MarijaGliha.pdf>
21. Lucić, S. (2007.). *Diplomski rad: Razumijevanje osnovnih principa zbrajanja kod vrtićke djece*. Neobjavljeni rad. Pribavljeno 2.4.2016., sa <http://darhiv.ffzg.unizg.hr/447/1/LucicSilvija.pdf>

PRILOZI

Prilog 1. Primjeri zadataka iz udžbenika Nina i Jan

1



$9 + 5 = \square$

OVAKO RAČUNA NINA:

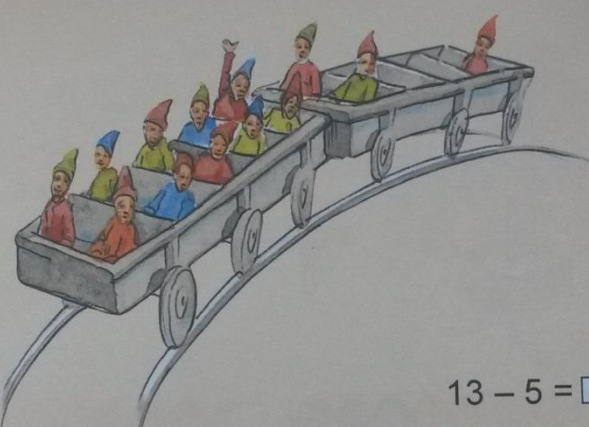
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●

OVAKO RAČUNA JAN:

●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●

Slika 27. Zbrajanje: slikovni prikaz i uz pomoć Zwanzigerfeld na dva načina

1



$13 - 5 = \square$

OVAKO RAČUNA NINA:

●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●

OVAKO RAČUNA JAN:

●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●

Slika 28. Oduzimanje: slikovni prikaz i uz pomoć Zwanzigerfeld na dva načina

ZBRAJANJE S PRIJELAZOM DESETICE

1 NINA RAČUNA OVAKO:



$$8 + 7$$

$$8 + 2 + 5 = \square$$

JAN RAČUNA OVAKO:



$$8 + 7$$

$$5 + 5 + 3 + 2 = \square$$

Slika 29. Dva načina rješavanja istog zadatka zbrajanja

ODUZIMANJE S PRIJELAZOM DESETICE

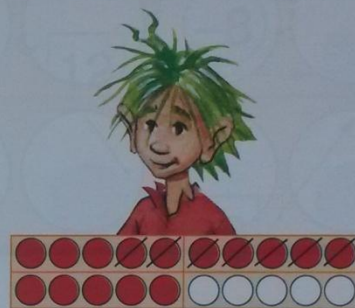
1 NINA RAČUNA OVAKO:



$$15 - 7$$

$$15 - 5 - 2 = \square$$

JAN RAČUNA OVAKO:



$$15 - 7$$

$$10 - 7 + 5 = \square$$

Slika 30. Dva načina rješavanja istog zadatka oduzimanja

6 $7 + 5 = \square$
 $7 + 3 + 2 = \square$

6 $6 + 5 = \square$
 $6 + 4 + 1 = \square$

7 $8 + 6 = \square$
 $8 + \square + \square = \square$

7 $5 + 9 = \square$
 $5 + \square + \square = \square$

RJEŠAVAM

Slika 31. Prikaz zbrajanja uz pomoć rastavljanja

5 $13 - 5 = \square$
 $13 - 3 - 2 = \square$

5 $15 - 7 = \square$
 $15 - 5 - 2 = \square$

6 $14 - 6 = \square$
 $14 - \square - \square = \square$

6 $12 - 3 = \square$
 $12 - \square - \square = \square$

Slika 32. Prikaz oduzimanja uz pomoć rastavljanja

1 ISPRIČAJ RAČUNSKU PRIČU, SLOŽI JEDNAKOST.
 2 NAPIŠI JEDNAKOST.
 3 4 5 IZRAČUNAJ.

Slika 33. Primjer zadatka u udžbeniku

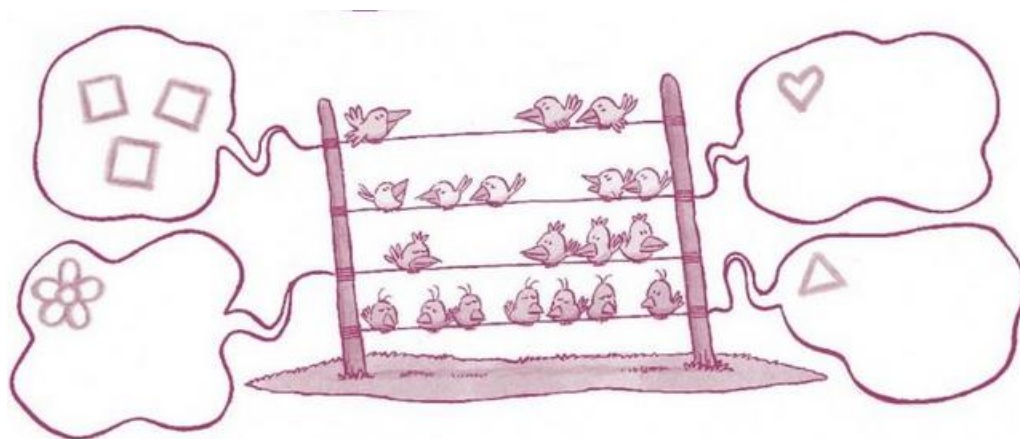
Prilog 2. Prvi kontrolni test

MATEMATIKA JE ZABAVNA

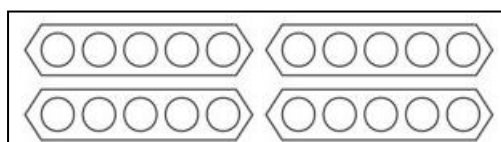


MOJE IME JE _____

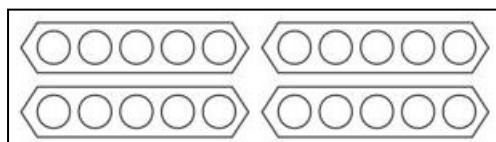
1. U SVAKI OBLAČIĆ NACRTAJ ONOLIKO PREDMETA KOLIKO JE PTIČICA NA TOJ ŽICI.



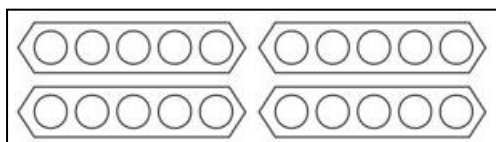
2. OBOJI 5 KRUGOVA CRVENOM BOJOM.



SADA OBOJI 5 KRUGOVA CRVENOM BOJOM, ALI NA DRUGAČIJI NAČIN.



3. OBOJI 6 KRUGOVA CRVENOM BOJOM.

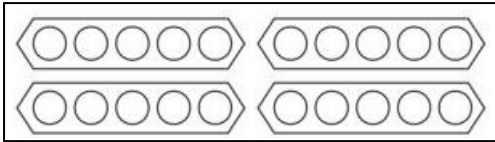


SADA 3 KRUGA OBOJI PLAVOM BOJOM.

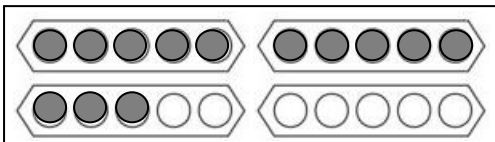
KOLIKO KRUGOVA JE OBOJANO?

$$6 + 3 = \underline{\quad}$$

4. OBOJI 6 KRUGOVA CRVENOM BOJOM PA 7 KRUGOVA PLAVOM BOJOM.



5. PRECRTAJ ONOLIKO KRUGOVA KOLIKO JE POTREBNO DA IH OSTANE 7.



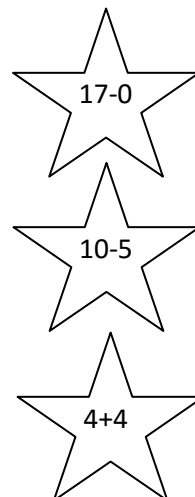
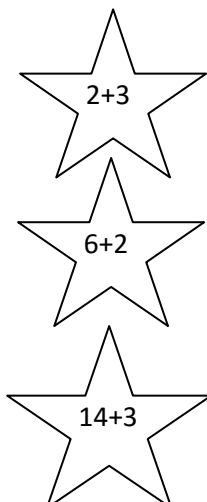
6. POPUNI KUĆICU DA REZULTAT ZBRAJANJA UVIJEK BUDE 5.

5	
0	5
1	

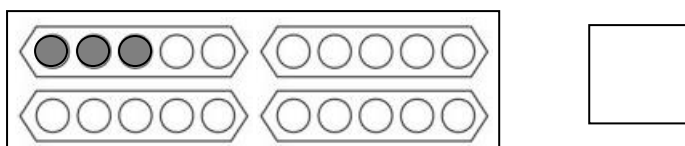
$$\rightarrow 5 = 0 + 5$$

$$\rightarrow 5 = 1 + \underline{\quad}$$

7. SPOJI ZADATKE KOJI DAJU ISTO RJEŠENJE



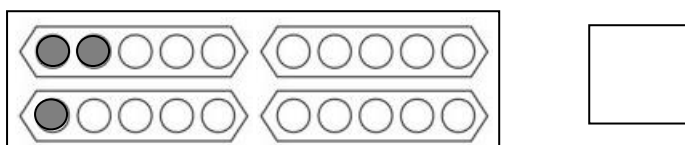
8. KOLIKO JE KRUGOVA OBOJANO? ODGOVOR NAPIŠI U KVADRATIĆ.



KAKO SI TO ZNAO/ ZNALA?

- a. BROJALA/BROJAO SAM
- b. NAPAMET

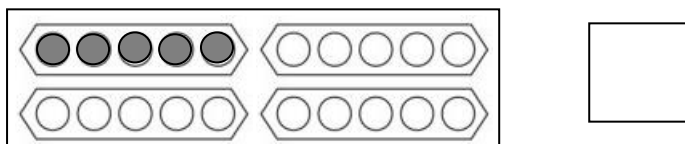
9. KOLIKO JE KRUGOVA OBOJANO? ODGOVOR NAPIŠI U KVADRATIĆ.



KAKO SI TO ZNAO/ ZNALA?

- a. BROJALA/BROJAO SAM
- b. NAPAMET

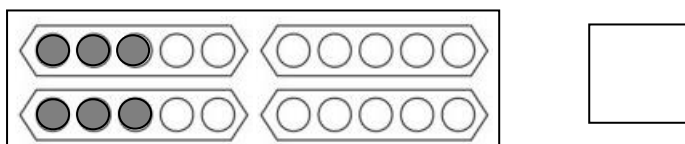
10. KOLIKO JE KRUGOVA OBOJANO? ODGOVOR NAPIŠI U KVADRATIĆ.



KAKO SI TO ZNAO/ ZNALA?

- a. BROJALA/BROJAO SAM
- b. NAPAMET

11. KOLIKO JE KRUGOVA OBOJANO? ODGOVOR NAPIŠI U KVADRATIĆ.



KAKO SI TO ZNAO/ ZNALA?

- a. BROJALA/BROJAO SAM
- b. NAPAMET

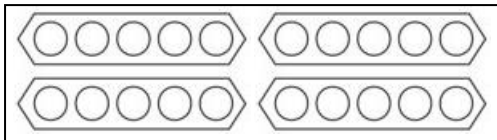
Prilog 3. Završni kontrolni test

MATEMATIKA JE ZABAVNA

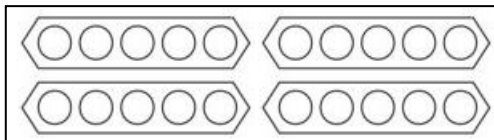
MOJE IME JE _____



1. OBOJI 7 KRUGOVA CRVENOM BOJOM.



2. OBOJI 6 KRUGOVA CRVENOM BOJOM, PA 9 KRUGOVA PLAVOM BOJOM.



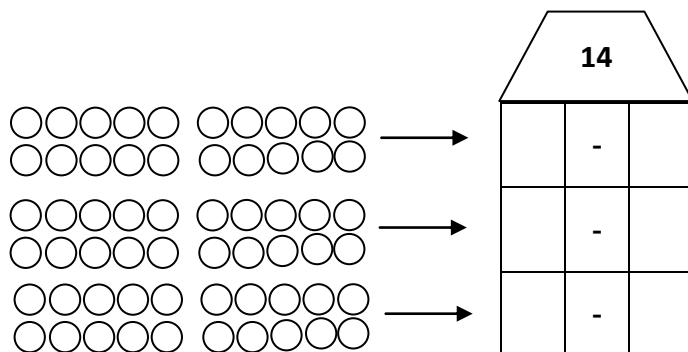
$$6 + 9 = \underline{\quad}$$

KOLIKO KRUGOVA JE OBOJANO?

3. POPUNI TABLICU TAKO DA OSMISLIŠ ZADATKE ČIJI JE ZBROJ 16.

<div style="display: flex; align-items: center; gap: 20px;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 10px;"> <div style="display: flex; gap: 5px;"> </div> <div style="display: flex; gap: 5px;"> </div> </div> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 10px;"> <div style="display: flex; gap: 5px;"> </div> <div style="display: flex; gap: 5px;"> </div> <div style="display: flex; gap: 5px;"> </div> <div style="display: flex; gap: 5px;"> </div> </div> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 10px;"> <div style="display: flex; gap: 5px;"> </div> <div style="display: flex; gap: 5px;"> </div> <div style="display: flex; gap: 5px;"> </div> <div style="display: flex; gap: 5px;"> </div> </div> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 10px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"> → <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td colspan="3" style="border: none; padding: 5px;">16</td> </tr> <tr> <td style="width: 30px; height: 30px;">10</td> <td style="width: 30px; height: 30px;">+</td> <td style="width: 30px; height: 30px;">6</td> </tr> <tr> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> <td style="width: 30px; height: 30px;">+</td> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> </tr> <tr> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> <td style="width: 30px; height: 30px;">+</td> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> </tr> <tr> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> <td style="width: 30px; height: 30px;">+</td> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> </tr> </table> </div> <div style="display: flex; align-items: center;"> → <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> <td style="width: 30px; height: 30px;">+</td> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> </tr> <tr> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> <td style="width: 30px; height: 30px;">+</td> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> </tr> <tr> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> <td style="width: 30px; height: 30px;">+</td> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> </tr> </table> </div> <div style="display: flex; align-items: center;"> → <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> <td style="width: 30px; height: 30px;">+</td> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> </tr> <tr> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> <td style="width: 30px; height: 30px;">+</td> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> </tr> </table> </div> <div style="display: flex; align-items: center;"> → <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> <td style="width: 30px; height: 30px;">+</td> <td style="width: 30px; height: 30px;"></td> </tr> </table> </div> </div> </div>			16			10	+	6		+			+			+			+			+			+			+			+			+	
16																																			
10	+	6																																	
	+																																		
	+																																		
	+																																		
	+																																		
	+																																		
	+																																		
	+																																		
	+																																		
	+																																		

4. POPUNI TABLICU TAKO DA OSMISLIŠ ZADATKE ČIJA JE RAZLIKA 14.



Prilog 4. Kartice za blic testove

