Zakoni računskih radnji

Pavičić, Tamara

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI

Tamara Pavičić

ZAKONI RAČUNSKIH RADNJI

DIPLOMSKI RAD

Osijek, 2018.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni učiteljski studij

ZAKONI RAČUNSKIH RADNJI

DIPLOMSKI RAD

Predmet: Elementarna matematika

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ružica Kolar-Šuper

Student: Tamara Pavičić

Matični broj: 1946

Modul: C

Osijek

Rujan, 2018.

SAŽETAK

Cilj je ovoga rada predstaviti zakone računskih radnji s kojima se učenici susreću u nižim razredima osnovne škole te ukazati na važnost njihove primjene u rješavanju matematičkih zadataka, ali i u svakodnevnim životnim situacijama. To su zakon asocijativnosti i zakon komutativnosti za zbrajanje i množenje te zakon distributivnosti množenja prema zbrajanju. Osim dokaza ovih zakona matematičkom indukcijom, ovaj rad donosi rezultate istraživanja na području dječjeg razumijevanja svojstava računskih radnji te prijedlog aktivnosti za demonstraciju i provjeru usvojenosti ovih sadržaja kao pomoć učiteljima u nastavi. U ovome je radu naglasak na važnosti konceptualnog razumijevanju zakona računskih radnji u primjeni strategija bržeg i lakšeg rješavanja matematičkih problema.

Ključne riječi: komutativnost, asocijativnost, distributivnost, zakoni računskih radnji, konceptualno znanje

ABSTRACT:

The aim of this paper is to present the laws of operations in mathematics which students encounter in lower grades of primary school and to point out the importance of using them in solving mathematical tasks, as well as in everyday situations. These are the associative and commutative laws of addition and multiplication and the distributive law of multiplication over addition. The paper offers both the mathematical induction proofs of the aforementioned laws and the results of the experiments concerning children's understanding of the properties of operations. It also suggests certain activities for demonstrating and evaluating the acquisition of these contents in order to provide help for teachers. The paper highlights the importance of conceptual understanding of the laws for using the strategies for quicker and easier solving of the mathematical tasks.

Key words: commutativity, associativity, distributivity, basic mathematical principles, conceptual knowledge

SADRŽAJ

1. UVOD

Zakoni računskih radnji olakšavaju nam rješavanje matematičkih problema. Koristimo ih, a da često nismo ni svjesni njihove primjene. U situaciji u kojoj trebamo brzo izračunati koliko je $16 \cdot 15$ kvadratu broja 15 dodajemo 15 $(225 + 15 = 240)$. Navedimo još jedan primjer, u svakoj od 8 prezentacijskih dvorana stolci su složeni u 5 redova, po 7 u svakom. Zanima nas koliko ljudi možemo smjestiti u tih 8 dvorana. Umjesto 8 puta 35 računamo 7 puta 40 jer nam je tako lakše, a rezultat je isti.

U gore navedenim situacijama koristili smo neke od strategija bržeg i lakšeg dolaženja do rješenja. Njihova se primjena događa spontano, jer smo uvijek u potrazi za jednostavnijim i praktičnijim postupcima. Iako se ove strategije čine očitim i razumljivim, u njihovoj su pozadini zakonitosti koje ćemo u ovom radu razmatrati. Dokazi nekih zakona računskih radnji prikazani su u trećem poglavlju ovoga rada.

Brojna istraživanja pokazuju da djeca vrlo rano razumiju neka svojstva zbrajanja. Formalnim obrazovanjem postupno otkrivaju sve složenije zakone koji im pomažu u daljnjem usvajanju matematičkih sadržaja. Upravo su ovi zakoni temelj razvoja induktivnog mišljenja, odnosno predstavljaju prve generalizacije koje učenici stvaraju.

Tijekom procesa usvajanja zakona računskih radnji vrlo je važno kod učenika stvoriti predodžbu ekvivalentnosti izraza sa suprotnih strana znaka jednakosti. Ti izrazi, dakle, nisu jednaki u svojim zapisima, već su ekvivalentni (jednakovrijedni). To možemo postići grafičkim demonstracijama tih izraza, što pridonosi razvoju konceptualnog znanja učenika. Konceptualno razumijevanje preduvjet je pravilnom konstruiranju i izvođenju matematičkih procedura.

2. SKUP PRIRODNIH BROJEVA

Talijanski matematičar Giuseppe Peano aksiomatski je uveo skup prirodnih brojeva 1891. godine. Skup prirodnih brojeva označavamo velikim tiskanim slovom $\mathbb{N}$[1].

Definicija. Neprazan skup $\mathbb{N}$ zove se **skup prirodnih brojeva**, a njegovi elementi **prirodni brojevi**, ako vrijede ovi aksiomi:

(P1) Postoji funkcija $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koju ćemo zvati 'biti sljedbenik'.

(P2) Postoji bar jedan element u $\mathbb{N}$, označimo ga s 1, takav da je $s(n) \neq 1$ za svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$.

(P3) Ako je $s(m) = s(n)$ za $m, n \in \mathbb{N}$, onda je $m = n$.

(P4) *Aksiom matematičke indukcije*

Ako je $\mathrm{M} \subseteq \mathbb{N}$ i ako vrijedi:

(B) $1 \in \mathrm{M}$,

(K) Ako za svaki prirodni broj $n \in \mathrm{M}$ slijedi da je i sljedbenik tog broja $s(n) \in \mathrm{M}$,

onda je $\mathrm{M} = \mathbb{N}$.

Navedeni aksiomi poznati su pod imenom Peanovi aksiomi skupa prirodnih brojeva.

Skup prirodnih brojeva prvi je skup brojeva s kojim se učenici upoznaju već na početku formalnog obrazovanja. Međutim, djeca se s prirodnim brojevima susreću mnogo ranije. Crnjac i suradnici (1994) navode da su djeci u tom periodu skup i njegova svojstva nešto sasvim prirodno i razumljivo. Međutim, sustav aksioma omogućio je „aksiomatsku izgradnju algebre prirodnih brojeva“ (Crnjac i sur., 1994:1), a time i dokazivanje zakonitosti algebarskih operacija. U ovom radu detaljnije ćemo se baviti zbrajanjem i množenjem kao operacijama u odnosu na koje je skup prirodnih brojeva zatvoren i svojstvima tih operacija.

[1] početno slovo lat. riječi *naturalis*- prirodan

2.1. Zbrajanje prirodnih brojeva

Zbrajanje prirodnih brojeva je funkcija $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, koja svakom uređenom paru prirodnih brojeva (m, n) pridružuje prirodan broj $m + n$, pri čemu vrijedi

(1) $m + 1 = s(m)$,

(2) $m + s(n) = s(m + n)$.

Broj $m + n$ zove se zbroj brojeva m i n.

Primjer. Nađimo zbroj brojeva 2 i 3.

Rješenje. $2 + 3 = 2 + s(2)$

$= s(2 + 2)$ prema (2)

$= s(2 + s(1))$

$= s(s(2 + 1))$ prema (2)

$= s(s(s(2)))$ prema (1)

$= s(s(3))$

$= s(4)$

$= 5$

Ispitajmo svojstva ove funkcije. Funkcija 'zbrajanje prirodnih brojeva' nije injektivna funkcija, npr. uređeni parovi (1,4) i (2,3) preslikavaju se u 5. Ova funkcija nije ni surjektivna jer u njezinoj kodomeni (skupu prirodnih brojeva) postoji element u koji se ne preslikava ni jedan uređeni par. Ne postoji uređeni par prirodnih brojeva koji se preslikava u 1, stoga slika funkcije nije jednaka kodomeni. Budući da ne vrijede svojstva injektivnosti i surjektivnosti, ova funkcija nije bijektivna.

Za zbrajanje prirodnih brojeva vrijede sljedeći zakoni:

- zakon asocijativnosti: $(m + n) + p = m + (n + p), \ \forall\, m, n, p \in \mathbb{N}$;
- zakon komutativnosti: $m + n = n + m, \ \forall\, m, n \in \mathbb{N}$;
- zakon kancelacije: $m + p = n + p \Rightarrow m = n, \forall\, m, n, p \in \mathbb{N}$.

U ovome su radu detaljnije objašnjena prva dva zakona jer se s njima učenici vrlo rano susreću te se od njih zahtijeva da ih primjenjuju u rješavanju matematičkih zadataka.

2.2. Množenje prirodnih brojeva

Množenje prirodnih brojeva je funkcija $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, koja svakom uređenom paru prirodnih brojeva (m, n) pridružuje prirodan broj $m \cdot n$, pri čemu vrijedi

(3) $m \cdot 1 = m$,

(4) $m \cdot s(n) = m \cdot n + m$.

Broj $m \cdot n$ zove se produkt brojeva m i n.

Primjer. Nađimo produkt brojeva 2 i 3.

Rješenje. $2 \cdot 3 = 2 \cdot s(2)$

$= 2 \cdot 2 + 2$ prema (4)

$= 2 \cdot s(1) + 2$

$= (2 \cdot 1 + 2) + 2$ prema (4)

$= (2 + 2) + 2$ prema (3)

$= (2 + s(1)) + 2$

$= s(2 + 1) + 2$ prema (2)

$= s(s(2)) + 2$ prema (1)

$= s(3) + 2$

$= 4 + 2$

$= 4 + s(1)$

$= s(4 + 1)$ prema (2)

$= s(s(4))$ prema (1)

$= s(5)$

$= 6$

Množenje prirodnih brojeva nije injektivna funkcija. Primjerice, uređeni parovi $(2,3)$ i $(6,1)$ preslikat će se u 6 jer je $2 \cdot 3 = 6 \cdot 1$. Za razliku od zbrajanja prirodnih brojeva, množenje prirodnih brojeva surjektivna je funkcija, jer za svaki prirodan broj n postoji uređeni par prirodnih brojeva čiji je umnožak jednak n. Množenje prirodnih brojeva nije bijektivna funkcija jer svojstvo injektivnosti nije zadovoljeno.

Budući da je produkt prirodnih brojeva prirodan broj, skup prirodnih brojeva zatvoren je u odnosu na operaciju množenja. Za množenje prirodnih brojeva vrijede još i ovi zakoni: zakon asocijativnosti i zakon komutativnosti te zakon distributivnosti množenja prema zbrajanju:

- zakon asocijativnosti: $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p), \forall\, m, n, p \in \mathbb{N}$;
- zakon komutativnosti: $m \cdot n = n \cdot m, \forall\, m, n \in \mathbb{N}$;
- zakon distributivnosti množenja prema zbrajanju:
  $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p, \forall\, m, n, p \in \mathbb{N}$;
- zakon kancelacije: $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n, \forall\, m, n, p \in \mathbb{N}$.

3. ZAKONI RAČUNSKIH RADNJI

U drugome su poglavlju navedeni aksiomi skupa prirodnih brojeva. U ovome poglavlju dokazat ćemo zakone računskih radnji u skupu prirodnh brojeva.

Najprije objasnimo postupak dokazivanja matematičkom indukcijom:

> Neka je T_n tvrdnja koja ovisi o prirodnom broju n i M skup svih prirodnih brojeva n za koje je tvrdnja T_n istinita.
>
> Ako za tvrdnju T_n (koja ovisi o prirodnom broju n) vrijedi:
> (i) Tvrdnja T_1 je istinita,
> (ii) Iz istinitosti tvrdnje T_n proizlazi istinitost tvrdnje T_{n+1} ,
> onda je tvrdnja T_n istinita za svaki prirodni broj n.

Ovaj se rad bavi onim zakonima računskih radnji koji se nalaze u Planu i programu za osnovnu školu, odnosno koji su uvršteni u program nastave matematike prvih četiriju razreda osnovne škole. To su zakoni komutativnosti i asocijativnosti za zbrajanje i množenje te zakon distributivnosti množenja prema zbrajanju. U naslovu *4.1 Zakoni računskih radnji u NPiP-u i NOK-u* nalaze se nazivi svih nastavnih jedinica koje sadrže te zakone.

Slijede dokazi spomenutih zakona matematičkom indukcijom.

3.1. Zakon asocijativnosti zbrajanja

Rezultat zbrajanja pribrojnika jednak je bez obzira na način združivanja (asocijacije) pribrojnika. Ovo se svojstvo zove asocijativnost[2] zbrajanja.

Teorem 1. Za svaka tri prirodna broja m, n i p vrijedi

$$(m+n)+p=m+(n+p).$$

Dokaz.

Neka su $m,n\in\mathbb{N}$ i neka je skup M skup prirodnih brojeva p za koje vrijedi svojstvo asocijativnosti, odnosno $(m+n)+p=m+(n+p),\ (m,n\in\mathbb{N})$.

(B) Za $p=1$ vrijedi

$(m+n)+1=s(m+n)$

[2] lat. *associatio*- udruženje

$= m + s(n)$ prema (2)

$= m + (n + 1),$

tj. $1 \in$ M.

(K) Pretpostavimo da je $p \in$ M:

$(m + n) + p = m + (n + p).$

Pokažimo da je s(p) ∈ M.

$(m + n) + s(p) = s((m + n) + p)$ prema (2)

$= s(m + (n + p))$ prema pretpostavci

$= m + s(n + p)$ prema (2)

$= m + (n + s(p))$ prema (2)

Budući da je $(m + n) + s(p) = m + (n + s(p))$, slijedi da je $s(p) \in M$.

Prema aksiomu matematičke indukcije (P4) $\mathrm{M} = \mathbb{N}$, dakle svojstvo asocijativnosti zbrajanja vrijedi za svaka tri prirodna broja.

3.2. Zakon komutativnosti zbrajanja

U ovom dijelu dokazat ćemo zakon komutativnosti za zbrajanje. Najprije dokažimo sljedeće leme.

Lema 1. Za svaki prirodan broj m vrijedi

$$1 + m = s(m).$$

Dokaz.

Neka je M skup prirodnih brojeva m za koje vrijedi $1 + m = s(m)$.

(B) Za $m = 1$ vrijedi:

$1 + 1 = s(1),$ prema (1)

tj. $1 \in M$.

(K) Pretpostavimo da je $m \in$ M takav da vrijedi:

$1 + m = s(m).$

Pokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za sljedbenik broja m.

$1 + s(m) = s(1 + m)$ prema (2)

$= s(s(m))$ prema pretpostavci

Ovime smo dokazali da je $s(m) \in$ M.

Prema aksiomu matematičke indukcije slijedi M $= \mathbb{N}$, odnosno da tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj m.

Lema 2. Za svaka dva prirodna broja m i n vrijedi:

$$s(m) + n = s(m + n).$$

Dokaz.

Neka je $m \in \mathbb{N}$ i M skup svih prirodnih brojeva n za koje vrijedi $s(m) + n = s(m + n)$.

(B) Za $n = 1$:

$s(m) + 1 = (m + 1) + 1$

$= m + (1 + 1)$ prema teoremu 1

$= m + s(1)$

$= s(m + 1)$ prema (2)

Dakle, $1 \in$ M.

(K) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prirodan broj n:

$s(m) + n = s(m + n)$.

Pokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za sljedbenik broja n.

$s(m) + s(n) = s(s(m) + n)$ prema (2)

$= s(s(m + n))$ prema pretpostavci

$= s(m + s(n))$ prema (2)

Budući da tvrdnja vrijedi i za sljedbenik broja n, zaključujemo da je $s(n) \in$ M.

Prema aksiomu matematičke indukcije (P4) dokazali smo da tvrdnja vrijedi za svaka dva prirodna broja.

Komutativnost[3] zbrajanja ili zamjena mjesta pribrojnika svojstvo je zbrajanja koje govori da zamjena mjesta pribrojnika ne utječe na konačan rezultat.

Teorem 2. Za svaka dva prirodna broja m i n vrijedi

$$m + n = n + m.$$

Dokaz.

Neka je $m \in \mathbb{N}$ i neka je M skup prirodnih brojeva n za koje je ova tvrdnja istinita.

(B) Za $n = 1$:

$m + 1 = s(m)$

$\quad = 1 + m$ prema lemi 1

tj., $n \in M$.

(K) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prirodan broj n:

$m + n = n + m.$

Tada za sljedbenik broja n vrijedi:

$m + s(n) = s(m + n)$ prema (2)

$\quad = s(n + m)$ prema pretpostavci

$\quad = s(n) + m.$ prema lemi 2

Ovime smo dokazali da je $s(n) \in$ M.

Prema aksiomu matematičke indukcije (P4) znači da je $\mathrm{M} = \mathbb{N}$, čime smo dokazali da je zbrajanje komutativno u skupu $\mathbb{N}$, odnosno da svojstvo komutativnosti zbrajanja vrijedi za svaka dva prirodna broja.

[3] lat. *commutare*- zamijeniti

3.3. Zakon komutativnosti množenja

U ovom dijelu dokazat ćemo zakon komutativnosti za množenje. Najprije dokažimo sljedeće leme.

Lema 3. Za svaki prirodan broj m vrijedi:

$$1 \cdot m = m.$$

Dokaz.

Neka je M skup prirodnih brojeva za koje vrijedi $1 \cdot m = m$.

(B) Za $m = 1$ vrijedi:

$1 \cdot 1 = 1.$

Dakle, $1 \in M$.

(K) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prirodan broj m:

$1 \cdot m = m.$

Pokažimo da tvrdnja vrijedi za sljedbenik broja m:

$1 \cdot s(m) = 1 \cdot m + 1$ prema (4)

$= m + 1$ prema pretpostavci

$= s(m)$

Ovime smo pokazali da tvrdnja vrijedi za sljedbenik broja m, odnosno da je $s(m) \in$ M.

Prema aksiomu matematičke indukcije (P4) slijedi M $= \mathbb{N}$, odnosno tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj m.

Lema 4. Za svaka dva prirodna broja m i n vrijedi

$$s(m) \cdot n = m \cdot n + n.$$

Dokaz.

Neka je m prirodan broj i neka je M skup svih prirodnih brojeva n za koje vrijedi tvrdnja.

(B) Za $n = 1$ imamo:

$s(m) \cdot 1 = s(m)$

$= m + 1$

$= m \cdot 1 + 1,$

tj. $1 \in \mathrm{M}$.

(K) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prirodan broj n:

$s(m) \cdot n = m \cdot n + n.$

Pokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za sljedbenik broja n:

$s(m) \cdot s(n) = s(m) \cdot n + s(m)$ prema (4)

$= (m \cdot n + n) + s(m)$ prema pretpostavci

$= m \cdot n + (n + s(m))$ prema teoremu 1

$= m \cdot n + s(n + m)$ prema (2)

$= m \cdot n + s(m + n)$ prema teoremu 2

$= s(m \cdot n + m + n)$ prema (2)

$= s(m \cdot s(n) + n)$ prema (4)

$= m \cdot s(n) + s(n)$ prema (2)

Slijedi $s(m) \cdot s(n) = m \cdot s(n) + s(n)$. Zaključujemo da lema 4 vrijedi za sljedbenik broja n, što znači da je $s(n) \in \mathrm{M}$.

Prema aksiomu matematičke indukcije (P4) slijedi $\mathrm{M} = \mathbb{N}$, tj. lema 4 vrijedi za svaka dva prirodna broja.

Dokažimo sada zakon komutativnosti za množenje.

Teorem 3. Za svaka dva prirodna broja m i n vrijedi

$$m \cdot n = n \cdot m.$$

Dokaz.
Neka je $m \in \mathbb{N}$. Skupom M nazovimo skup prirodnih brojeva n za koje vrijedi $m \cdot n = n \cdot m$.

(B) Za $n = 1$ vrijedi

$m \cdot 1 = m$

$= 1 \cdot m.$ prema lemi 3

(K) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prirodan broj n:

$m \cdot n = n \cdot m.$

Dokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za sljedbenik broja n.

$m \cdot s(n) = m \cdot n + m$ prema (4)

$= n \cdot m + m$ prema pretpostavci

$= s(n) \cdot m$ prema lemi 4

Dokazali smo da tvrdnja vrijedi za sljedbenik broja n, odnosno da je $s(n) \in \mathrm{M}$.
Prema aksiomu indukcije slijedi $\mathrm{M} = \mathbb{N}$, odnosno zakon komutativnosti množenja vrijedi za svaka dva prirodna broja.

3.4. Zakon distributivnosti množenja prema zbrajanju

Zbroj možemo pomnožiti brojem tako da svaki pribrojnik pomnožimo tim brojem, a dobivene umnoške zbrojimo. Ovo je zakon distributivnosti[4] množenja prema zbrajanju.

Teorem 4. Za svaka tri prirodna broja m, n i p vrijedi

$$(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p.$$

Dokaz.

Neka su m i n prirodni brojevi i neka je M skup svih prirodnih brojeva p za koje vrijedi navedeno svojstvo.
(B) Za $p = 1$ vrijedi:
$(m + n) \cdot 1 = m + n$
$= m \cdot 1 + n \cdot 1.$
(K) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prirodan broj p:
$(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p.$
Dokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za sljedbenik broja p.

---

[4] lat. *distribuere*- raspodijeliti

$(m+n)\cdot s(p) = (m+n)\cdot p + (m+n)$ prema (4)

$= (m\cdot p + n\cdot p) + (m+n)$ prema pretpostavci

$= m\cdot p + (n\cdot p + m + n)$ prema teoremu 1

$= m\cdot p + (m + n\cdot p + n)$ prema teoremu 2

$= (m\cdot p + m) + (n\cdot p + n)$ prema teoremu 1

$= m\cdot s(p) + n\cdot s(p)$ prema (4)

Ovime je dokazano da je $s(p) \in$ M.

Slijedi M $= \mathbb{N}$, odnosno dokazali smo da distributivnost množenja prema zbrajanju vrijedi za svaka tri prirodna broja.

3.5. Zakon asocijativnosti množenja

Umnožak se ne mijenja ako faktore združimo na različite načine.

Teorem 5. Za svaka tri prirodna broja m, n i p vrijedi

$$(m\cdot n)\cdot p = m\cdot (n\cdot p).$$

Dokaz.

Neka su m i n bilo koja dva prirodna broja, a M skup prirodnih brojeva p za koje vrijedi ovo svojstvo.

(B) Za $p = 1$ vrijedi:

$(m\cdot n)\cdot 1 = m\cdot n$ prema (3)

$= m\cdot (n\cdot 1).$ prema (3)

(K) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prirodan broj p:

$(m\cdot n)\cdot p = m\cdot (n\cdot p).$

Dokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za sljedbenik broja p.

$(m\cdot n)\cdot s(p) = (m\cdot n)\cdot p + m\cdot n$ prema (4)

$= m\cdot (n\cdot p) + m\cdot n$ prema pretpostavci

$= m \cdot (n \cdot p + n)$ prema teoremu 4

$= m \cdot (n \cdot s(p))$ prema (4)

Ovime smo dokazali da tvrdnja vrijedi za $s(p)$, što znači da je $s(p) \in \mathrm{M}$.

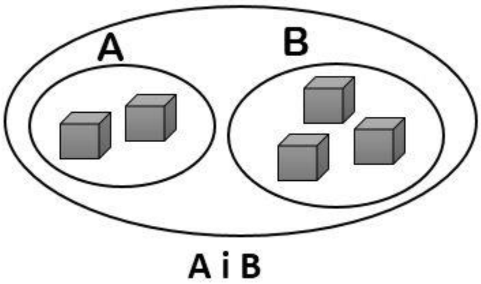
Prema aksiomu matematičke indukcije (P4) slijedi $\mathrm{M} = \mathbb{N}$, odnosno asocijativnost množenja vrijedi za svaka tri prirodna broja.

4. REDOSLIJED USVAJANJA SVOJSTAVA ALGEBARSKIH OPERACIJA

Sa zakonima računskih operacija učenici se susreću već na početku formalnog obrazovanja. Đurović i Đurović (1987) ističu da je učiteljeva uloga primjerima uputiti učenika na uočavanje svojstva računske operacije te da ne trebamo „izricati nikakvo pravilo koje bi učenici naučili napamet, nego od njih zahtijevamo da uočeno svojstvo (...) znaju na primjerima obrazložiti i primijeniti“ (79). Od učenika se traži da eksplicitno izraze termine kojima se imenuju pojedini brojevi u jednakostima, kao što su: pribrojnici, zbroj, faktori, umnožak. Tako se, primjerice, u Nastavnom planu i programu za osnovnu školu (MZOŠ, 2010) pod temom *Zamjena mjesta pribrojnika* navode ova obrazovna postignuća: „rabiti nazive pribrojnici i zbroj; primijeniti svojstvo zamjene mjesta pribrojnika“ (239). Ćurić i Markovac (1984) također naglašavaju važnost opreznog pristupa obradi ovih nastavnih sadržaja, kako bi se izbjegla verbalistička i formalistička poopćenja i generalizacije svojstava računskih operacija:

> Pri tome se valja držati pravila: objašnjavanje sadržaja tih svojstava (...) provoditi isključivo na osnovi promatranja primjera (zadataka). S obzirom na uzrast učenika, nije dobro tražiti verbalnu reprodukciju bez oslonca u realnosti, zornim pomagalima ili matematičkim zapisima. Samo na osnovi mnoštva odgovarajućih primjera i uz pomoć zornih demonstracija učenik tog uzrasta moći će shvatiti poopćenje tih svojstava. Zato ponavljanje tih sadržaja treba dobro organizirati i metodički pravilno izvoditi. (26)

Neka istraživanja potvrđuju da se asocijativnost i komutativnost usvajaju istovremeno, odnosno da nema dobnih razlika u razumijevanju ovih dvaju svojstava algebarskih operacija. Lauren B. Resnick objašnjava da se dječje razumijevanje asocijativnosti i komutativnosti zbrajanja ne razlikuje, već da su oba utemeljena na razumijevanju aditivnosti (Resnick, 1992, prema Pavlin-Bernardić i sur., 2009). Resnick smatra da razumijevanje ovih svojstava proizlazi iz razumijevanja odnosa dio-cjelina. Aditivnost tako objašnjava kao svojstvo skupova prema kojemu se oni međusobno povezuju i tako tvore nove skupove. Bez obzira na njihov raspored i način grupiranja unutar novoga skupa, uvijek se radi o istome skupu i obrnuto, sastav skupa je isti bez obzira na raspored njegovih elemenata; $(A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$. S ovim svojstvom učenike možemo upoznati već na prvim satima matematike tijekom obrade skupova. Nastavni program uvelike se promijenio u posljednjih tridesetak godina. Tako danas učenici ne uče skupove eksplicitno, već se upoznavaju sa skupovima geometrijskih likova, tijela, zatim skupovima brojeva, skupovima točaka u ravnini i sl. Ipak, ovdje učitelj ima priliku pokazati učenicima da se skup sastoji od manjih skupova, odnosno da više različitih skupova čini veći skup. Aditivnost zbrajanja možemo, dakle, promatrati u uniji disjunktnih skupova (slika 1).



$$
\begin{aligned}
k(A) &= 2 \\
k(B) &= 3 \\
k(A \cup B) &= k(A) + k(B) \\
&= 2 + 3 = 5
\end{aligned}
$$

Slika 1. **Zbrajanje prirodnih brojeva kao zbroj kardinalnih brojeva disjunktnih skupova**

Usvajanjem svojstva aditivnosti učenicima je lako razumjeti svojstvo komutativnosti koje ističe nevažnost reda elemenata od kojih se skup sastoji, odnosno podskupova od kojih se sastoji veći skup. Djeci je jasno vidljivo da nije važno kojim redoslijedom navodimo elemente od kojih je skup sastavljen, kao što nije bitan niti redoslijed navođenja podskupova nekog skupa (komutativnost unije skupova: $A \cup B \cup C \equiv B \cup A \cup C$). Isto vrijedi i za kardinalne brojeve tih skupova: $a + b + c = b + a + c$. Nadalje, ako unutar skupa grupiramo neke elemente, time nismo promijenili sastav tog skupa; $(A \cup B) \cup C \equiv A \cup B \cup C \equiv A \cup (B \cup C)$. Analogno vrijedi: $(a + b) + c = a + b + c = a + (b + c)$. Pokažimo još i kako su komutativnost i asocijativnost povezana svojstva. Želimo li, primjerice, grupirati podskupove A i C, prije asocijativnosti primijenit ćemo komutativnost: $(A \cup B) \cup C \equiv (B \cup A) \cup C \equiv B \cup (A \cup C)$, odnosno $(a + b) + c = (b + a) + c = b + (a + c)$. Godau i suradnici (2014) daju objašnjenje ovakvog postupka: „Komutativnost opravdava zamjenu mjesta ili poretka operanada unutar izraza, ali asocijativnost to ne dopušta“ (2). Vrijedi i obrnuto, komutativnost samo mijenja mjesta ili redoslijed operanada, nakon čega računamo redom, slijeva nadesno. Promotrimo primjer.

$$
\begin{aligned}
(4 + 3) + 6 &= 4 + (3 + 6) && \text{prema teoremu 1} \\
&= 4 + (6 + 3) && \text{prema teoremu 2} \\
&= (4 + 6) + 3 && \text{prema teoremu 1} \\
&= 10 + 3 = 13
\end{aligned}
$$

Da pojasnimo, zapis rješenja u niže navedenome obliku uključuje također oba svojstva, ali u kraćem zapisu.

$$
\begin{aligned}
(4+3)+6 &= (4+6)+3 \\
&= 10+3 = 13
\end{aligned}
$$

Prije svojstva asocijativnosti primijenili smo svojstvo komutativnosti.

„Iako Resnick (1992) pretpostavlja da se komutativnost i asocijativnost istovremeno razvijaju, rezultati nekih istraživanja pokazuju da se razumijevanje komutativnosti događa prije nego razumijevanje asocijativnosti“ (Canobi i sur., 1998, 2002, 2003, prema Pavlin-Bernardić i sur., 2009:104). Ipak, Pavlin-Bernardić i suradnici (2009) potvrđuju zaključke Lauren Resnick (1992). U sklopu svoga radu *Imaju li medvjedići jednak broj bombona* autori su, po uzoru na ranija istraživanja, proučavali konceptualno razumijevanje osnovnih svojstava zbrajanja u djece dobi od 4 do 7 godina. Dva su problema provedenog eksperimenta: istražiti postoje li dobne razlike u razumijevanju osnovnih svojstava zbrajanja te postoje li razlike u usvajanju pojedinih svojstava zbrajanja (aditivnosti, komutativnosti, asocijativnosti). Dvama medvjedićima bomboni su dodijeljeni po načelima navedenih svojstava, a djeca (ispitanici) su trebala reći imaju li medvjedići jednak broj bombona. Istraživanje potvrđuje veću uspješnost starije djece u razumijevanju svojstava zbrajanja u odnosu na mlađu djecu, ali razlike u usvajanju pojedinih svojstava nisu utvrđene. Nalazi istraživanja navode na zaključak da se razumijevanje različitih svojstava zbrajanja događa simultano te da usvajanje jednog svojstva ne prethodi drugom, barem što se tiče konceptualnog[5] razumijevanja.

Već su ranije Canobi i suradnici (1998, 2002, 2003, prema Pavlin-Bernardić i sur., 2009) provodili slična istraživanja, ali s djecom nešto starijeg uzrasta (6-8 godina), pa su time i zadatci bili složeniji, čemu Pavlin-Bernardić i suradnici pripisuju različite zaključke ovih istraživanja. Autori zaključuju da se „postojanje razlika u razumijevanju različitih vrsta zbrajanja pojavljuje tek na višim razinama razumijevanja svojstava zbrajanja te da je ta razlika povezana i s računskim, a ne samo s konceptualnim zahtjevima zadataka“ (Pavlin-Bernardić i sur., 2009:113).

4.1. Zakoni računskih radnji u NPiP-u i NOK-u

Analizom *Nastavnog plana i programa za osnovnu školu* utvrđeni su nazivi nastavnih tema u vezi sa zakonima računskih radnji, njihov redoslijed, ključni pojmovi i obrazovna postignuća. U formalnom obrazovanju obrada svojstva komutativnosti prethodi obradi svojstva

[5] Konceptualno znanje odnosi se na poznavanje kategorija, principa i generalizacija, sposobnost predočavanja i razumijevanja, nasuprot proceduralnom znanju (poznavanje postupaka, metoda i algoritama).

asocijativnosti. Ova činjenica ne iznenađuje, s obzirom na to da su za primjenu svojstva asocijativnosti potrebna barem tri pribrojnika, ali i uvođenje zagrada. Svojstvo komutativnosti zbrajanja (*Zamjena mjesta pribrojnika*) obrađuje se već u prvome razredu osnovne škole tijekom zbrajanja u skupu prirodnih brojeva do 10. Osim što omogućuje brže i lakše rješavanje zadataka (detaljnije objašnjeno dalje u tekstu), ovo je prvi zakon koji učenik otkriva generalizacijom, koji ga potiče na induktivno mišljenje te, kao takav, ima veliku ulogu u učenikovoj sposobnosti poopćavanja matematičkih činjenica.

Tablica 1. **Popis nastavnih tema u vezi sa zakonima računskih radnji u nižim razredima osnovne škole**

RAZRED	**NASTAVNA TEMA**		**KLJUČNI POJMOVI**	**OBRAZOVNA POSTIGNUĆA**
	NAZIV	REDNI BROJ		
1.	Zamjena mjesta pribrojnika	14.	pribrojnici, zbroj, zamjena mjesta pribrojnika	rabiti nazive pribrojnici i zbroj; primijeniti svojstvo zamjene mjesta pribrojnika
2.	Zbrajanje i oduzimanje triju i više brojeva	9.	zbrajanje, oduzimanje, zagrade	ovladati postupkom rješavanja zadatka uz uporabu zagrada i bez uporabe zagrada
	Zamjena mjesta faktora	14.	množenje, faktor, zamjena mjesta faktora	razumjeti i primijeniti svojstvo komutativnosti množenja
3.	Množenje zbroja brojem	12.	množenje zbroja	ovladati postupkom množenja zbroja brojem
	Dijeljenje zbroja brojem	16.	dijeljenje zbroja	ovladati postupkom dijeljenja zbroja brojem

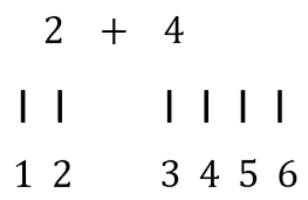
Nastavna jedinica *Zbrajanje i oduzimanje triju i više brojeva* u *Nastavnom planu i programu za osnovnu školu* pojavljuje se tek u popisu tema za drugi razred. Ovo je nastavna tema tijekom čije obrade učenici usvajaju zakon asocijativnosti za zbrajanje generalizacijom. Učenici primjećuju da rezultat zbrajanja ne ovisi o načinu združivanja pribrojnika (zagradama). U drugome razredu uvodi se množenje te slijedi obrada svojstva komutativnosti množenja (nastavnom jedinicom *Zamjena mjesta faktora*) odmah nakon usvajanja množenja kao zbrajanja jednakih pribrojnika. Dalje u radu pokazano je kako primjena ovog svojstva olakšava učenje tablice množenja, ali se, isto tako, inzistira na konceptualnom razlikovanju izraza $a \cdot b$

i $b \cdot a$, unatoč njihovoj ekvivalentnosti. Svojstvo asocijativnosti množenja ne obrađuje se posebnom nastavnom jedinicom, učenici ga upoznaju analogno svojstvu asocijativnosti zbrajanja. Distributivnost množenja prema zbrajanju svojstvo je koje se obrađuje u trećem razredu nastavnom temom *Množenje zbroja brojem*, a prethodi *Množenju i dijeljenju s 10 i 100* te *Množenju dvoznamenkastog broja jednoznamenkastim*. Ishod je potonje teme rastaviti dvoznamenkasti broj $\overline{ab}$ na izraz oblika $10a + b$ te primijeniti svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju. U tablici 1 nalazi se popis nastavnih tema s ključnim riječima i obrazovnim postignućima vezanih za obradu zakona računskih radnji u nižim razredima osnovne škole. Podatci su preuzeti iz *Nastavnog plana i programa za osnovnu školu* (2006).

U *Nacionalnom okvirnom kurikulumu* (2011) propisana su postignuća koja bi učenik trebao ostvariti po završetku pojedinih odgojno-obrazovnih ciklusa. Za nastavu matematike ta su postignuća razrađena u dvjema dimenzijama. To su matematički koncepti i matematički procesi. Dalje u ovome radu prikazana je međuovisnost koncepata i procesa na primjeru zakona računskih radnji.

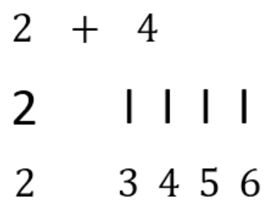
5. SVOJSTVA ZBRAJANJA U SKUPU ℕ

Riječ komutativnost označava svojstvo nekih algebarskih operacija, u našem slučaju zbrajanja i množenja, da se rezultat ne mijenja ako zamijenimo mjesta pribrojnicima, odnosno faktorima. Svojstvo komutativnosti zbrajanja dio je programa matematike u prvome razredu osnovne škole. Međutim, istraživanja (Baroody i Gannon, 1984; Resnick, 1992) pokazuju da već i djeca predškolskog uzrasta razumiju ovo svojstvo zbrajanja te da mogu uspješno rješavati zadatke barem na razini konceptualnog razumijevanja komutativnosti zbrajanja, jer još ne poznaju matematičke simbole i procedure. „Tijekom razvoja djeca sve više integriraju konceptualno znanje o matematičkim načelima i proceduralno znanje o prečacima“ (Haider i sur., 2014; prema Godau i sur., 2014:2). 'Prečace' učenici koriste kako bi brže i lakše došli do rješenja zadataka. Oni, naime, uviđaju mogućnost primjene svojstava računskih radnji te rješenje jednog zadatka 'prenose' na drugi. Baroody i Gannon (1984), Godau i suradnici (2014), Hansen (2015), Pavlin-Bernardić i suradnici (2009), Resnick (1992) samo su neki od autora koji spominju ovaj način rješavanja zadataka te ističu kako 'gledanjem nazad' učenici izbjegavaju računanje, ali pokazuju da razumiju svojstva računskih radnji. Među zadatcima prepoznaju parove onih na kojima mogu primijeniti određena svojstva te 'prenijeti' rješenje iz jednog u drugi. Neki autori ovo smatraju dokazom da učenici razumiju jednakost rezultata takvih zadataka te da razumiju zakon koji su primijenili. Baroody i Gannon (1984) za parove takvih zadataka koriste izraz 'commuted pairs' (na primjer, 7+2 i 2+7, dalje u tekstu: 'komutativni parovi'). Problem koji su oni postavljali pred dijete bio je odrediti je li takvim parovima pridružena jednaka suma. Nakon Baroodyja i Gannon brojni autori pišu o takvim parovima zadataka te u svoja istraživanja uključuju slične provjere razumijevanja komutativnosti zbrajanja. Nakon što učenici odrede zbroj dvaju pribrojnika (7+2), cijela jednakost ostaje vidljiva na projekciji tijekom pojavljivanja novog računa koji se razlikuje samo po mjestu pribrojnika (2+7). Učenicima je potrebno puno manje vremena za odgovor, jer primjećuju da je jedina razlika u odnosu na prethodni zadatak upravo redoslijed pribrojnika, što ionako ne utječe na rezultat te odgovaraju da je zbroj isti, nepromijenjen, jednak. Rezultati svih navedenih istraživanja potvrđuju da djeca vrlo rano prepoznaju da se radi o istome zbroju, neovisno o redoslijedu pribrojnika. Štoviše, neka istraživanja pokazuju da djeca predškolske i rane školske dobi nisu u stanju samo prepoznati jednakost rezultata 'komutativnih parova', već aktivno koriste svojstva zbrajanja kao strategije bržeg i lakšeg računanja. „Djeca iznalaze sve naprednije i učinkovitije strategije prebrojavanja u svrhu zbrajanja“ (Baroody i Gannon, 1984:322). Osnovna takva strategija jest prebrojavanje koje Baroody i Gannon nazivaju CAF (counting-all first) metodom. Koristeći ovu strategiju, djeca do rezultata dolaze prebrojavanjem od prvog pribrojnika, uključujući i njega. Slijedi slikovni prikaz takvog zbrajanja (slika 2).



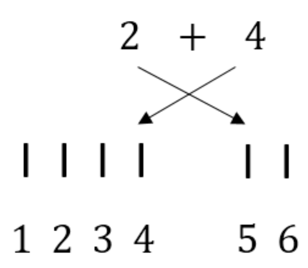
Slika 2. **CAF metoda zbrajanja**

Skratimo li ovu metodu na prebrojavanje od kardinalne vrijednosti prvog pribrojnika, dobit ćemo metodu COF (counting-on first). Promotrimo slikovni prikaz ove metode.



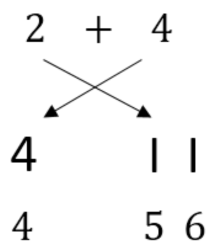
Slika 3. **COF metoda zbrajanja**

Kako bi smanjila napor pri pamćenju drugog pribrojnika, neka djeca počinju brojenje od većeg pribrojnika. Zanemarivanjem zadanog redoslijeda pribrojnika ovi učenici primjenjuju zakon komutativnosti zbrajanja i time si olakšavaju posao. Postupak Baroody i Gannon nazivaju CAL (counting-all larger) metodom, a ista je prikazana na slici 4.



Slika 4. **CAL metoda zbrajanja**

COL (counting on larger) metodom učenici najbrže dolaze do rješenja zato što brojenje nastavljaju od kardinalne vrijednosti većeg pribrojnika. Promotrimo na slici 5.



Slika 5. **COL metoda zbrajanja**

Vlahović-Štetić i Vizek Vidović (1998) za ovu metodu koriste termin 'pribrajanje manjeg'. Autorice navode da se većina djece do 9 godina pri zbrajanju najčešće služi upravo ovom metodom te drže da „strategija 'pribrajanja manjeg' ovisi o shvaćanju aditivne kompozicije broja[6] i načela komutativnosti“ (Vlahović-Štetić i Vizek Vidović, 1998:19). Ipak, ne možemo sigurno tvrditi da iznalaženje CAL ili COL strategije podrazumijeva uvažavanje svojstva komutativnosti (Groen i Resnick, 1977, Resnick i Ford, 1981; prema Baroody i Gannon, 1984). Baroody i Gannon (1984) pretpostavljaju, a zatim rezultatima istraživanja i potvrđuju, više mogućnosti. Prva je od njih da djeca prirodno pretpostavljaju da vrijedi komutativnost zbrajanja (bilo prisjećanjem da komutativni parovi daju jednak rezultat ili potvrđivanjem točnosti rezultata od strane odraslih) te pokušavaju primijeniti CAL, odnosno COL metodu. Točno rješenje zadatka odobrava im zadržavanje takve metode. Druga je mogućnost da generalizacijom zaključuju da redoslijed pribrojnika ne utječe na rezultat zbrajanja te primjenjuju naprednije metode zbrajanja jer je jednostavnije krenuti od većeg pribrojnika. Ove dvije mogućnosti daju potvrdan odgovor na postavljeni problem: usvojenost svojstva komutativnosti nužan je preduvjet za iznalaženje naprednijih strategija zbrajanja. Postoji i treća mogućnost, prema kojoj to nije slučaj. Djeca do rezultata dolaze prebrojavanjem od većeg pribrojnika jer im je tako lakše, samo zato što uviđaju da će tako rastavljati onaj manji i skratiti proceduru prebrojavanja. Baroody i Gannon (1984) ističu da neka od te djece neće biti uspješna u rješavanju zadataka kojima se provjerava razumijevanje komutativnosti zbrajanja. Dijete koje nije usvojilo ovo svojstvo došlo je do točnog rezultata samo zato što u ovome slučaju komutativnost zaista vrijedi (što nije morao biti slučaj, jer dijete nema argumente na temelju kojih mijenja redoslijed pribrojnika pa je to moglo učiniti i u nekoj drugoj računskoj operaciji koja nije komutativna). Takvo dijete, navode Baroody i Gannon, na jednak način rješava $5 + 1$ i $1 + 5$, ali im ne predviđa jednak rezultat.

[6] Shvaćanje aditivne kompozicije broja možemo opisati kao shvaćanje da se skup od 7 elemenata sastoji od 5 elemenata i još 2 (elementa).

Otežavajući čimbenik usvajanja principa komutativnosti zasigurno je i doživljavanje zbrajanja kao unarne operacije (Weaver, 1982; prema Baroody i Gannon, 1984), koje se događa kod neke djece. Naime, mlađa djeca mogu interpretirati $3+2$ kao 'tri i još dva' (unarna operacija) umjesto kao kombinaciju kardinalne vrijednosti 3 i kardinalne vrijednosti 2 (binarna operacija). Za razliku od problema $3+2$, dijete će problem $2+3$ interpretirati kao 'dva i još tri' te ova dva zadatka doživjeti kao psihološki drugačije probleme. Budući da ne može predvidjeti ishode ovih problema, ono smatra da će drugačiji problemi dati drugačija rješenja.

Resnick (1992) istraživanjem razvoja komutativnosti opisuje opći model razvoja matematičkog mišljenja postavljajući četiri razine matematičkog znanja; 1. razina: protokvantitativna matematika, 2. razina: kvantitativna matematika, 3. razina: numerička matematika, 4. razina: operativna matematika (prema Rovan, 2009). „Resnick (1992) predlaže model prema kojemu djeca, unutar bilo kojeg matematičkog područja, polaze od konkretnog mišljenja te dodaje tri razine sve apstraktnijeg mišljenja“ (Baroody i sur., 2003: 128). U tablici 2 navedene su razine matematičkog znanja prema Resnick i njihova svojstva prikazana na primjeru komutativnosti zbrajanja.

Tablica 2. **Razine razumijevanja komutativnosti zbrajanja (Resnick, 1992)**

RAZINA KOMUTATIVNOSTI ZA ZBRAJANJE	NALAZI RASUĐIVANJA	PRIMJER
protokvantitativna	konkretni nekvantificirani objekti	$plave\ loptice + crvene\ loptice =$ $crvene\ loptice + plave\ loptice$ $dio\ 1 + dio\ 2 = dio\ 2 + dio\ 1$
kvantitativna	specifični brojevi u smislenom kontekstu	$3\ loptice + 4\ loptice = 4\ loptice + 3\ loptice$
numerička	specifični brojevi u apstraktnom kontekstu	$3+4=4+3$
operativna	opći aritmetički principi	$a+b=b+a$

Resnick (1992) smatra da razumijevanje komutativnosti zbrajanja proizlazi iz razumijevanja aditivnosti, tj. odnosa dio-cjelina. Rezultatima svojih istraživanja potvrđuje da djeca vrlo rano mogu rastaviti cjelinu na dijelove i bez poteškoća te dijelove ponovno, na različite načine, spajati u cjelinu. Autorica razlikuje nekoliko tipova zbrajanja te navodi primjere 'udruživanja četiriju jabuka i triju jabuka' te 'povećanje za pet skupa od dvadeset pikula' (prema Baroody i sur., 2003). U prvome primjeru prepoznajemo binarnu koncepciju (dvije količine rezultiraju trećom), dok se drugi primjer odnosi na unarnu koncepciju zbrajanja (jedna količina rezultira drugom). Resnick obje operacije, povećanje (unarnu) i udruživanje (binarnu), uvrštava u protokvantitativnu razinu razumijevanja komutativnosti zbrajanja. Međutim, Baroody i suradnici (2003) navode istraživanja čiji rezultati potvrđuju da se unarna koncepcija zbrajanja razvija prije binarne. Drugim riječima, djeca prvo doživljavaju zbrajanje kao unarnu operaciju, odnosno funkciju koja se događa samo na prvome pribrojniku. Promotrimo sljedeći zadatak:

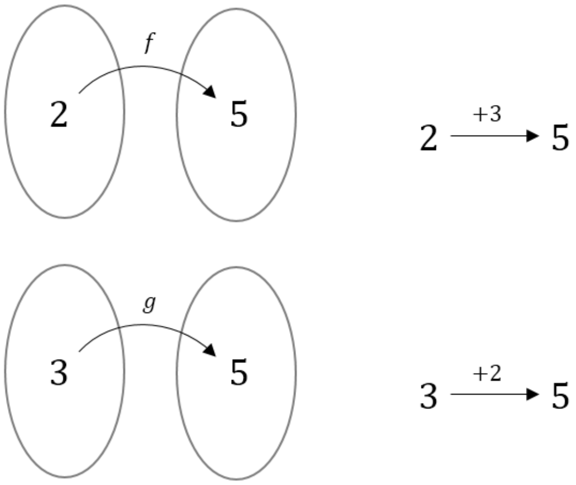
Marko je imao tri pikule. Ivan mu je dao još dvije. Koliko pikula sada ima Marko?

Navedeni matematički problem primjer je kojim možemo opisati unarnu koncepciju zbrajanja. Dijete postavlja račun $3 + 2$ te ovu operaciju doživljava kao funkciju koja broj 3 preslikava u broj 5. Dodajmo ovom primjeru još jedan:

Marko je imao dvije pikule. Ivan mu je dao još tri. Koliko pikula sada ima Marko?

Analogno prethodnom primjeru, dijete postavlja račun $2 + 3$ i zapaža jednak rezultat ovih, različitih, problema. Baroody i suradnici (2003) navode nekompetentnost djeteta u pretpostavljanju rješenja jednog ovakvog zadatka nakon neposrednog rješavanja drugog. Na ovome nalazu temelje mišljenje da unarna koncepcija zbrajanja inhibira usvajanje svojstva komutativnosti ove algebarske operacije. Mišljenja su da djeca ove zadatke doživljavaju drugačijima i zato im predviđaju drugačija rješenja. Slika 6 shematski prikazuje proces zbrajanja kao unarnu operaciju.[7] Unarna je operacija ona koja podrazumijeva jedan ulazni element (operand) koji rezultira drugim. Dijete zbrajanje doživljava kao funkciju koja prvome pribrojniku (djelovanjem drugoga) pridružuje neki drugi broj.

[7] $2 + 3 = 5$ dijete doživljava kao funkciju $f(x) = x + 3$. Račun $3 + 2 = 5$ za njega je nova funkcija, stoga ju označavamo slovom g; $g(x) = x + 2$. Funcija f za argument 2 poprima vrijednost 5, a istu vrijednost funkcija g poprima za argument 3.

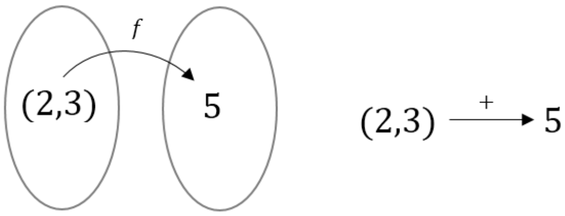


Slika 6. **Zbrajanje kao unarna operacija**

Za razliku od unarne, u binarnoj operaciji dvije ulazne vrijednosti rezultiraju trećom. Takva je koncepcija zbrajanja djeci jasnija ako je zadatak postavljen ovako:

Marko ima dvije crvene i tri plave pikule. Koliko pikula ukupno ima Marko?

Shematski prikaz binarne koncepcije zbrajanja vidljiv je na slici.



Slika 7. **Zbrajanje kao binarna operacija**

Baroody i suradnici (2003) ne slažu se s modelom usvajanja komutativnosti koji je postavila Resnick, a u okviru kojega ona u protokvantitativnu razinu uključuje i unarnu i binarnu koncepciju zbrajanja. Pravu komutativnost, tvrde oni, djeca razumiju tek usvajanjem zbrajanja kao binarne operacije. Već su ranije Baroody i Gannon (1984) postavili model razvoja usvajanja komutativnosti temeljen na unarnoj i binarnoj koncepciji zbrajanja, a Baroody i suradnici (2003) predlažu neke izmjene u tome modelu s obzirom na rezultate novih istraživanja. Njihov je prijedlog prikazan u tablici 3[8].

[8] Detaljnije o svim razinama i podrazinama potražiti u Baroody i sur. (2003).

Tablica 3. **Razine razumijevanja komutativnosti zbrajanja (Baroody i sur., 2003)**

Razina 0	unarna koncepcija + nema razumijevanja komutativnosti
Razina 1	unarna koncepcija + nema razumijevanja komutativnosti i binarna koncepcija + protokomutativnost
Razina 2	unarna koncepcija + protokomutativnost i binarna koncepcija + prava komutativnost
Razina 3	unarna koncepcija + pseudokomutativnost i binarna koncepcija + prava komutativnost

Autori koji se bave razvojem usvajanja zakona računskih radnji u središte pozornosti stavljaju primjenu tih zakona u svrhu dolaska do rješenja 'prečacem'. Godau i suradnici (2014) ističu da djeca trebaju razviti vještine potrebne za spontano prepoznavanje i primjenu strategija bržeg i lakšeg računanja te da nije dovoljno da znaju primijeniti 'prečac' kada im je to eksplicitno rečeno. Nadalje, njihova se stručnost očituje samostalnim odabirom između rješavanja zadatka standardnim načinom ili potrage za 'prečacem', odnosno njegove primjene. Problem s kojim se učitelji susreću jest evaluacija takve učenikove stručnosti. Točno riješen zadatak ne implicira nužno i razumijevanje matematičkih zakona. Vrlo je važno odabrati zadatke kojima možemo sa sigurnošću provjeriti učenikovo konceptualno znanje. Na primjer, zadatak koji glasi: 'Izračunaj, a zatim zamijeni mjesta pribrojnicima pa ponovno izračunaj' ne provjerava ništa doli proceduralne primjene zakona komutativnosti. U ovakvome zadatku učenik ne mora znati ni da će rezultat nakon primjene svojstva ostati isti. Smatram da ovakvi zadatci nemaju vrijednost u vježbanju zakona računskih radnji, već samo na satu obrade novoga gradiva, tijekom generalizacije, odnosno poopćenja ovog zakona. Godau i suradnici (2014) za samostalnu primjenu zakona komutativnosti predlažu nešto drugačije zadatke od onih na koje su učenici naviknuli. Primjerice, uvođenjem trećeg pribrojnika provjeravaju hoće li oni, analogno zadatcima s dvama pribrojnicima, primijeniti svojstvo komutativnosti ukoliko takav postupak olakšava računanje. Autori navode primjer $4 + 7 + 6$ kao problem koji je lakše riješiti računanjem $4 + 6 + 7$ jer je $4 + 6 = 10$ (dopunjavanje do desetice) čemu je jednostavno dodati 7. Ako učeniku postavimo zadatak $8 + 5 + 7 =?$ i zatim zadatak $5 + 7 + 8 =?$, provjerit ćemo prepoznaje li on mogućnost izbjegavanja izračunavanja drugog rezultata primjenom zakona računskih radnji (usporedbom pribrojnika). Godau i suradnici (2014) u zadatcima s trima pribrojnicima dovode u pitanje primjenu samo jednoga zakona; odnosno smatraju da je uz komutativnost, moguće, primijenjeno i svojstvo asocijativnosti (pogledati naslov 4

Redoslijed usvajanja svojstava algebarskih operacija). Ovakvim je zadatcima, u kojima učenici koriste strategije dopunjavanja do deset i usporedbe pribrojnika, moguće provjeriti usvojenost zakona računskih radnji, ali samo ako oni predstavljaju novu situaciju za učenika, to jest zadatke s kakvima se nisu ranije susreli. Upotrijebe li učenici svojstva računskih radnji samoinicijativno, možemo razmatrati njihovo razumijevanje matematičkih zakona. Svako daljnje uvježbavanje jednakih tipova zadataka otvara mogućnost da učenici primjenjuju prethodno provjerenu strategiju, tj. onu koja je dovela do točnoga rezultata, bez njezinog konceptualnog razumijevanja. Poznavanje metoda i postupaka pri rješavanju zadataka odnosi se na proceduralno znanje (znanje kako). Definiramo ga kao sposobnost primjene određene strategije u specifičnom kontekstu. Konceptualno znanje (znanje zašto) odnosi se na apstraktno razumijevanje načela na kojima se temelje uvjeti primjene tih strategija (Hiebert i LeFevre, prema Hansen i sur., 2015). Konkretnije, točna primjena i provođenje određenog postupka pri rješavanju matematičkog zadatka ne podrazumijeva nužno i konceptualno razumijevanje, u smislu razumijevanja zašto i pod kojim uvjetima određeni postupak ili strategija funkcionira. U provjeravanju navedenih dviju vrsta znanja Dijanić i Debelec također ističu bitnom činjenicu da su neki tipovi zadataka učenicima od ranije poznati:

> Proceduralno znanje u pravilu se provjerava zadatcima kakve su učenici već prije vidjeli i njima slične rješavali. Konceptualno znanje se provjerava zadatcima koji su učenicima novi, nepoznati, dotad neviđeni kako bi se doista ispitalo poznavanje koncepata, a ne naučenih pravila ili postupaka. (2015)

Na tragu navedenoga zaključuju da isti zadatak kod jednoga učenika može provjeriti konceptualno, a kod drugoga proceduralno znanje. „Ukoliko je učenik već rješavao takav ili slične zadatke, ne možemo biti sigurni provjeravamo li poznatim zadatkom konceptualno znanje (što nam je bila namjera), uvježbani postupak ili bez razumijevanja naučene činjenice“ (Dijanić i Debelec, 2015).

Proceduralno se znanje provjerava praćenjem izvođenja zadanog postupka, navode Dijanić i Debelec (2015), pri čemu je naglasak na točnosti rješenja i brzini rješavanja. U hrvatskim udžbenicima prevladavaju takvi zadatci – „zadatci zatvorenog tipa bez konteksta s naglaskom na računanje i operiranje“ (Trupčević i Glasnović Gracin, 2014, prema Dijanić i Debelec, 2015). Konceptualno su znanje Hiebert i LeFevre provjeravali usmeno „kako bi ispitali u kojoj su mjeri pojmovi, ideje i koncepti međusobno povezani, ali brojni su autori nakon njih počeli uvoditi neke nove specifične zadatke za provjeru konceptualnog znanja“ (Dijanić i Debelec, 2015). Prema Dijanić i Debelec (2015), Rittle-Johnson i Schneider (2013) provjeru konceptualnog znanja dijele na implicitnu i eksplicitnu. Zadatci kojima se provodi implicitna provjera obuhvaćaju zadatke kategoričkog izbora, procjene (nepoznatih postupaka, tuđeg odgovora), prevođenje iz jednog prikaza u drugi, uspoređivanje količina, pronalaženje 'prečaca'. Eksplicitna provjera odnosi se na objašnjavanje definicija, obrazlaganje tvrdnji, izradu konceptualnih mapa i sl. Iako konceptualno razumijevanje zakona računskih radnji možemo provjeriti usmeno, potrebno je uvesti više takvih zadataka u pisanome obliku kako učenici ne bi razvijali samo vještine računanja i primjenjivanja pravila, već kako bi samostalno odlučivali koje pravilo primijeniti, što, dakako, uključuje razumijevanje koncepata. Ponudit ću nekoliko takvih zadataka koji potiču razvijanje konceptualnog razumijevanja svojstava računskih radnji. U nastavku slijede aktivnosti koje se mogu provoditi pri obradi svojstava zbrajanja, odnosno prije utvrđivanja zakona koji vrijede za zbrajanje u skupu prirodnih brojeva.

5.1. Aktivnosti za demonstraciju svojstava zbrajanja

U nastavi matematike, a posebice se to odnosi na formiranje matematičkih zakonitosti u svijesti učenika, važno je voditi se načelom poučavanja od konkretnog ka apstraktnom. Ćurić i Markovac (1984) ističu važnost zornih pomagala i promatranja primjera u realnom kontekstu. Autori upozoravaju učitelja da nije dobro tražiti objašnjenja matematičkih principa bez oslonca u realnosti. Gligor Duda (1964) promatranje smatra osnovom stjecanja matematičkih znanja. Osim pasivnog promatranja, učenik treba aktivno koristiti didaktički materijal (kamenčiće, zrna kukuruza ili graha, sjemenke, kockice, umjetni ili pravi novac, štapiće itd.) te napredovati od perceptivnih sadržaja do misaonih radnji koje će te sadržaje transformirati u pojmove (Duda, 1964). Uloga je učitelja prepoznati pravi trenutak za poopćavanje matematičkih principa u smislu usmjeravanja učenika ka njihovoj generalizaciji.

<u>Konop i štipaljke</u>

Đurović i Đurović (1983) za obradu nastavne jedinice *Zamjena mjesta pribrojnika* predlažu igru s konopom i štipaljkama. Konop možemo povezati za naslone dviju stolica koje zatim postavimo tako da se konop napne i da ga učenici dobro vide. Na konop prikvačimo, na primjer, 3 plave i 2 crvene štipaljke za sušenje rublja. Dva učenika postavimo s različitih strana konopa i upitamo ih koliko je štipaljki na njemu. Neki će učenici do odgovora doći zbrajanjem, neki prebrojavanjem, no u svakom slučaju očekujemo rezultat 5. Oba učenika trebaju na ploču napisati postupak računanja, a zatim pozivamo druga dva učenika i ponavljamo igru s drugim brojem štipaljki. Igra traje dok učenici sami ne zaključe da broj štipaljki na konopu ne ovisi o njihovom redoslijedu.

Okretanje papira

U uvodnome dijelu sata na kojemu ćemo obrađivati svojstvo komutativnosti zbrajanja možemo ponoviti zbrajanje dvaju pribrojnika. Na papir nacrtamo dva niza točaka, na primjer, 9 s lijeve i 5 s desne strane. Zatražimo od učenika da zbrajanjem izračunaju koliko je točaka na papiru ($9 + 5 = 14$) i zapišu račun u bilježnice. Ponovimo nazive operanada (prvi pribrojnik, drugi pribrojnik) i rezultata zbrajanja (suma ili zbroj), a nakon toga okrenemo papir te zapisujemo novi račun ($5 + 9 = 14$) i ponovno imenujemo operande. Učenici će uvidjeti da se radi o istome skupu točaka na papiru te da se okretanjem papira (zamjenom mjesta pribrojnika) ne mijenja ukupan broj točaka. Umjesto papira možemo okretati i domino pločice.

Nizanje perlica na ogrlicu

Po uzoru na navedene primjere, predlažem sljedeću aktivnost za demonstraciju komutativnosti zbrajanja. Učenicima možemo pripremiti ogrlice (mogu poslužiti i trakice vune) na koje trebaju nanizati određen broj perlica jedne, odnosno druge boje. Ova je igra zamišljena kao rad u paru. Svaki učenik na svoju ogrlicu treba nanizati 3 crvene i 2 plave perlice i to na sljedeći način: jedan učenik treba nanizati prvo crvene, a zatim plave kuglice provlačeći kroz njih ogrlicu slijeva nadesno, a zatim treba ogrlicu zatvoriti, odnosno spojiti njezine krajeve, dok će drugi učenik u paru učiniti to isto, s jednakog kraja ogrlice, ali počevši prvo od plavih perlica. Učenici trebaju u paru usporediti ogrlice koje su načinili od jednakih perlica, potom im učitelj zadaje zadatak da od jedne perlice u paru pokušaju načiniti drugu bez odvezivanja ogrlice. Nakon što prebace sve perlice jedne boje preko čvora, učenici imaju dvije potpuno jednake ogrlice. Prebacujući perlice učenici dobivaju komutativne parove, a postupke zbrajanja zapisuju u bilježnice te s učiteljem komentiraju rezultate zbrajanja.

Suma brojeva na igraćim kockama

Učenikovu samoinicijativnu primjenu svojstva komutativnosti za zbrajanje možemo provjeriti igrom s kockama na kojima su brojevi zapisani znamenkama ili predstavljeni točkicama. Igra je vrlo jednostavna. Učenik istovremeno baca dvije igraće kocke i računa sumu brojeva na njima te ju zapisuje na papir. Isto radi i sljedeći učenik, a nakon što se izredaju svi učenici, bod osvaja onaj koji je imao najveći zbroj. Broj krugova (ponavljanja) unaprijed određuje učitelj, a pobjednik je onaj tko ima najviše bodova na kraju igre. Kako igra odmiče, sve je vjerojatnije da će učenici tijekom računanja sume brojeva na kockama primjenjivati COL metodu. Ova se igra može igrati i s djecom predškolske dobi jer čak i vrlo malo dijete shvaća kako si olakšati postupak zbrajanja (prebrojavanja) brojeva, odnosno točkica na igraćim kockama.

Premještanje majica na policama

Ova aktivnost demonstracija je svojstva asocijativnosti za zbrajanje. Učitelj na ploču nacrta dva ormara (ili postavi aplikacije ormara) s po dvjema policama. Magnetne kartice koje predstavljaju majice učitelj postavi u prvi ormar na sljedeći način: dvije majice 'složi' jednu na drugu i smjesti ih na prvu policu, pored njih 'složi' još tri majice (također jednu na drugu). Na drugu policu smjesti četiri majice. Na prvu policu drugoga ormara spremi samo dvije majice, a na drugu policu tri majice te pored njih još četiri. Učitelj učenike upita u kojem ormaru ima više majica. Neki će učenici do odgovora doći prebrojavanjem, neki zbrajanjem, a neki uspoređivanjem količina. Nakon odgovora da se u oba ormara nalazi jednak broj majica učitelj s učenicima postavlja račune za oba ormara (uz objašnjavanje upotrebe zagrada za združivanje majica na istoj polici): ispod crteža prvoga ormara zapisuje se $(2+3)+4=5+4=9$, ispod drugoga ormara $2+(3+4)=2+7=9$. Zaključuje se da se majice u prvome ormaru mogu jednostavno premjestiti tako da budu složene kao majice u drugome ormaru, ili obrnuto. Neovisno o tome jesu li tri majice na prvoj polici ili drugoj, u ormaru se nalazi jednak broj majica. Umjesto odjevnih predmeta i ormara, možemo se igrati novcem i novčanikom, a zagrade će označavati pretince novčanika.

Raspored vozila

Asocijativnost zbrajanja učenicima možemo približiti tako da pred njih postavimo sljedeći problem:

> Vlasnik obrta za popravak vozila pokušava rasporediti 4 automobila, 7 motocikala i 10 bicikala u dvije (trenutno prazne) prostorije. Koliko će se vozila ukupno nalaziti u tim dvjema prostorijama ako vlasnik u jednu od njih smjesti motorna vozila, a u drugu vozila bez motornog pogona? Koliko će se vozila ukupno nalaziti u tim prostorijama ako u jednu od njih vlasnik smjesti vozila s po 4, a u drugu vozila s po 2 kotača?

Neki će učenici bez računanja zaključiti da ukupan broj vozila ne ovisi o njihovom razmještaju. Ovu tvrdnju možemo provjeriti rješavanjem dvaju postavljenih računa:

$(4+7)+10=$

$4+(7+10)=$

U prvoj jednakosti zbroj brojeva u zagradi predstavlja ukupan broj motornih vozila, dok smo zagradom u drugoj jednakosti naznačili vozila s po dva kotača. Usporedbom dobivenih rezultata potvrđujemo asocijativnost zbrajanja.

5.2. Zadatci za ponavljanje i provjeru

Pri planiranju provjere usvojenosti određene nastavne građe učitelj neprestano na umu treba imati ciljeve[9] nastavnih sati na kojima se ista obrađivala ili uvježbavala. U skladu s tim ciljevima, učitelj je definirao ishode[10] učenja. Tim su ishodima definirani minimalni kriteriji prolaznosti koje sada treba procijeniti.

***Tablica 4.* Obrazovni ishodi na kraju prvog razreda osnovne škole u vezi sa zakonima računskih radnji, domena Brojevi**

ISHOD	RAZRADA ISHODA	RAZINE USVOJENOSTI			
		ZADOVOLJA-VAJUĆA	DOBRA	VRLO DOBRA	IZNIMNA
Učenik primjenjuje svojstva komutativnosti i asocijativnosti u zbrajanju.	Učenik primjenjuje svojstva komutativnosti i asocijativnosti.	Učenik primjenjuje komutativnost i asocijativnost u zbrajanju na konkretnome materijalu.	Učenik primjenjuje svojstva komutativnosti i asocijativnosti u računskim zadatcima uz manju pogrješku.	Učenik primjenjuje svojstva komutativnosti i asocijativnosti u računskim zadatcima objašnjavajući pravila.	Učenik bira strategiju računanja koristeći se svojstvima komutativnosti i asocijativnosti.

Tablica 4 prikazuje obrazovne ishode na kraju prvoga razreda osnovne škole u vezi s usvajanjem zakona računskih radnji prema prijedlogu nacionalnoga kurikuluma iz 2017. godine. Ključno je konstruirati zadatke koji će mjeriti ono što zaista želimo ispitati. U današnjim udžbenicima matematike prevladavaju zadatci kojima učenici uvježbavaju pravilno izvođenje računskih postupaka. Takvi zadatci za prvi razred najčešće glase: 'Izračunaj, zamijeni mjesta pribrojnicima pa ponovno izračunaj'. Ponekad uz njih stoji i pitanje: 'Je li se zbroj promijenio?' Ovakvi zadatci jasno upućuju učenika na način rješavanja, to su zadatci zatvorenog tipa[11]. Rješavajući ih, učenici samo slijede upute, ne biraju strategiju rješavanja zadatka. Takvim

[9] „Obrazovnim ciljevima ili ciljevima učenja definiramo ono što bi studenti morali znati učiniti (izvršiti) na kraju određenog razdoblja učenja, a prije nisu znali. Ciljevi učenja, za razliku od nastavnih ciljeva, definiraju ono što bi morao znati učiniti student, a ne nastavnik“ (Dolaček-Alduk i Lončar-Vicković, 2009:41-42). „Odgojno-obrazovni ciljevi su za razliku od ishoda učenja iskazi koji u širim okvirima opisuju kakvu će korist učenik imati od učenja i često se ne mogu neposredno mjeriti“ (Marinović, 2013:6).

[10] „Ishodi učenja su skup sposobnosti koje govore što će student znati, razumjeti ili biti sposoban raditi nakon završetka obrazovnog procesa“ (Dolaček-Alduk i Lončar-Vicković, 2009:31).
„Potpuno definiran ishod učenja ima tri komponente: 1. tzv. aktivni glagol koji na vidljiv ili čujan način opisuje ono što će učenik moći učiniti po završetku učenja, a prije toga to nije mogao; 2. uvjete pod kojima će učenik demonstrirati ili pokazati svoje novo znanje ili vještinu; 3. minimalni kriterij prolaznosti“ (Marinović, 2013:9).

[11] Zadatci zatvorenog tipa imaju jedan način rješavanja, samim time i jedno točno rješenje.

zadatcima nemoguće je provjeriti konceptualno znanje učenika. Ukoliko pred učenika stavimo zadatak otvorenog tipa[12], omogućujemo mu da sam bira način na koji će ga riješiti, čime potičemo samostalno stvaranje koncepata, a time i bolje razumijevanje istih. Priprema takvih zadataka zahtijeva dodatan trud učitelja, posebice iz razloga što razumijevanje koncepata provjeravamo novim, učenicima nepoznatim zadatcima. Svaki tip zadatka s kojim su se učenici već susreli više ne provjerava njihovo konceptualno, već samo proceduralno znanje (Dijanić i Debelec, 2015). Tek primjena procedure u novoj situaciji, vlastitim odabirom bez eksplicitne upute, znak je više razine kognitivnih procesa bilo koje kategorije znanja[13]. Učitelj, dakle, mora pronaći ili osmisliti zadatke koji učenicima omogućuju da u novom kontekstu primijene poznate metode.

Prilog 1 sadrži primjere zadataka koji potiču razvoj konceptualnog razumijevanja. Osim što je primjere ovakvih zadataka teže pronaći u literaturi te zahtijevaju dodatnu angažiranost učitelja, još jedan čimbenik otežava uvježbavanje i provjeru konceptualnog razumijevanja, u ovome slučaju, asocijativnosti i komutativnosti zbrajanja. Ovakvi zadatci zahtijevaju praćenje učenika tijekom rješavanja jer naglasak nije samo na točnosti rezultata, već na postupku rješavanja. Ovo navodi na zaključak da se konceptualno znanje učenika provjerava usmeno. Ipak, to ne znači da ga je nemoguće provjeriti pisanim provjerama. Ukoliko učenik ponudi cijeli postupak rješavanja (ili pisano objašnjenje) te u njemu primjenjuje 'prečace' kao metode bržeg i lakšeg računanja, konkretno- zakone računskih radnji, možemo zaključiti da razumije njihove koncepte. Međutim, ako učenik zapiše samo konačno rješenje, ne znamo kako je do njega došao. Čak i ako zapiše postupak, a ne primijeni neke od navedenih metoda, ne možemo sa sigurnošću zaključiti da ne posjeduje konceptualno znanje o 'prečacima', već da ih samo nije upotrijebio. Zadatke koje predlažem u Prilogu 1. učenici mogu rješavati usmeno pred učiteljem, zapisujući postupke kako ne bi pamtili duge procedure, ili ih mogu riješiti samostalno, a zatim svoja rješenja i postupke obrazložiti učitelju ili ih ponuditi u pisanome obliku uz rješenja zadataka.

Ovi zadatci sastavljeni su tako da ne zahtijevaju pronalaženje rezultata računskih radnji koje su u njima sadržane. Cilj je provjeriti može li učenik to primijetiti i s obzirom na to odabrati

[12] Za razliku od zadataka zatvorenog tipa, do rješenja zadataka otvorenog tipa može se doći na više načina. Ponekad ti načini ne vode jednome rješenju, već zadatak ima više različitih točnih rješenja. Ovaj tip zadataka omogućuje učeniku da sam odabere način na koji će doći do rješenja, potiče njegovu kreativnost i pomaže razvoj konceptualnog znanja učenika.

[13] Svih šest razina kognitivnih procesa (izraženih glagolima zapamti, objasni, primijeni, analiziraj, vrjednuj, stvaraj) mogu se ostvarivati u jednoj od četiriju kategorija znanja, a to su činjenično, konceptualno, proceduralno i metakognitivno znanje (Marinović, 2013).

strategiju rješavanja zadatka, a da ona ne uključuje pronalaženje rezultata. Temeljna strategija za rješavanje ovih zadataka jest usporedba količina koja se pak temelji na razumijevanju odnosa dio-cjelina. Podsjetimo se Resnick (1992) i njezinih zaključaka o razumijevanju svojstava asocijativnosti i komutativnosti. Ona smatra da razumijevanje ovih svojstava zbrajanja proizlazi iz aditivnosti zbrajanja.

U prvome zadatku, čiji je prvi stupac namijenjen već učenicima prvoga razreda, potrebno je usporediti izraze na suprotnim stranama kružića. Neki učitelji inzistiraju na zapisivanju rezultata prije njihove usporedbe. Smatram da takva uputa ograničava učenikov odabir načina rješavanja zadatka, a kojih zaista ima više te time ovaj zadatak smatram zadatkom otvorenog tipa. Nadalje, uputom o rješavanju izraza sa svake strane, koje nazivamo naznačenim rezultatima, ne samo da sputavamo učenika u odabiru metode, već sebi (učiteljima) uskraćujemo saznanja o učenikovom konceptualnom znanju. Pružimo li učeniku slobodu u rješavanju problema, saznajemo puno više od činjenice da je on (ili nije) došao do njegova rješenja. Iako uz ove zadatke učenicima ne skrećemo pozornost na postojanje 'prečaca' eksplicitno, ipak to postižemo načinom na koji je zadatak koncipiran. Ovakvi zadatci, dakle, omogućuju implicitnu provjeru konceptualnog znanja. Prvi postavljeni problem najočitije prikazuje jednakost rezultata (s obje strane kružića nalaze se jednaki izrazi, $12 + 6$ i $12 + 6$). Sljedeći problem sadrži komutativne parove ($3 + 5$ i $5 + 3$) te učenici vrlo brzo uočavaju postojanje 'prečaca' kakve zatim traže i u zadatcima koji slijede. Sljedeći problem sadrži dva izraza s jednim jednakim pribrojnikom te je potrebno usporediti samo druga dva pribrojnika ($7 + 4$ i $8 + 7$). Iako se ne radi o komutativnim parovima, učenik će ih pokušati naći i u ovome problemu te tako uočiti da se u drugome izrazu ponavlja samo jedan pribrojnik iz prvoga. Drugi bi pribrojnik također trebao biti jednak onomu preostalom iz prvog izraza (da bi rezultati bili isti), a budući da je veći, i rezultat je veći (generalizacija: ako jedan od pribrojnika uvećamo za a, i zbroj se uvećava za a). Sljedeći izrazi koje treba usporediti su $13 + 6$ i $2 + 5$. Na prvi pogled, ova dva izraza ne nameću 'prečac' i učenik ga vjerojatno ne bi potražio da smo ovaj zadatak postavili među prvima, ali s obzirom na svojstvo komutativnosti zbrajanja koje je dosad primjenjivao, učenik očekuje da jednake količine (dijelovi) s različitih strana kružića vode do jednakih cjelina. Nakon što ih ne uoči, promatra na koji su se način pribrojnici promijenili. Oba pribrojnika u drugome izrazu manja su od pribrojnika u prvom pa je manji i zbroj. Na sličan način možemo usporediti i sljedeća dva izraza ($9 + 6$ i $8 + 10$). Budući da u ovome primjeru nisu oba pribrojnika drugog izraza veća od onih u prvome, rješenje nije tako očito, ali je, u odnosu na prvi izraz, povećan i manji, ali i veći pribrojnik, stoga je sigurno da se povećao i zbroj. Ne očekujem da će učenici sami doći do ovakvih promišljanja u svim opisanim primjerima, ali ih na njih možemo navesti sukcesivnim pitanjima.

Godau i suradnici (2014) smatraju da „spontana primjena prečaca vodi do znanja o drugim prečacima temeljenim na istom svojstvu“. Ovo je polazište za sastavljanje zadataka kojima možemo provjeriti učenikovo razumijevanje i primjenu zakona računskih radnji. U drugome stupcu prvoga zadatka učenici mogu pronaći nove 'prečace' temeljene na svojstvima zbrajanja, a uvođenjem triju operanada stvaramo novi kontekst u okviru kojega možemo procijeniti učenikovo konceptualno razumijevanje zakona računskih radnji, u ovome slučaju asocijativnosti i komutativnosti. Posljednja dva primjera ovoga zadatka bave se 'komutativnošću oduzimanja'. Krive analogije česta su pojava u zaključivanju djece, a potrebno ih je predvidjeti te na vrijeme ukloniti. Oduzimanje nije komutativna računska radnja, odnosno $a - b \neq b - a$. Postavimo li učenicima jednostavan problem poput usporedbe izraza $10 - 2$ i $2 - 10$, vrlo je izvjesno da će većina njih odgovoriti da oduzimanje nije komutativno (dijelom i zbog toga što misle da od manjeg broja ne mogu oduzeti veći, odnosno da se izraz $2 - 10$ 'ne može riješiti'). Međutim, u složenijem zadatku, kao što je usporedba izraza $60 + 50 - 6$ i $60 + 6 - 50$, sadržan je isti problem, ali učenicima nije tako očit, a ne postoji ni prepreka u računanju jer se sve 'može riješiti'[14]. Ovakve izraze djeca najlakše razlikuju u konkretnim primjerima, tj. specifičnom kontekstu. Na primjer, broj 60 predstavlja iznos novca (u kunama) koji imamo na početku. Nije svejedno hoćemo li dobiti još 50 kuna, a potrošiti 6 (što je samo dio toga, a ostaje nam i cijeli početni iznos) ili ćemo dobiti još 6 pa potrošiti 50 kuna (što je više od onoga što smo dobili, što znači da trošimo i početni iznos). Usredotoče li se djeca na jednakost pribrojnika, a zanemare drugu dimenziju zadatka, a to su računske operacije, mogla bi pogrješno pretpostaviti da su ova dva izraza ekvivalentna. Slično tomu, posljednji primjer provjerava 'asocijativnost oduzimanja', koja također ne vrijedi. Zanimljiva je usporedba ovih izraza: $34 + 48 - 15$ i $48 + 34 - 15$. Zamijenili smo mjesta samo pribrojnicima, što ne utječe na naknadno oduzimanje broja 15. Hafstrom (1961) objašnjava zbrajanje kao binarnu operaciju na sljedeći način: to je operacija koju izvršavamo na dva operanda. Kada zbrajamo tri ili više prirodnih brojeva, ustvari obavljamo slijed zbrajanja od kojih svako uključuje samo dva prirodna broja. Na primjer, računajući $2 + 5 + 8$ prvo broju 2 pribrajamo 5, a zatim dobivenom rezultatu 7 pribrajamo 8 (ponovno samo dva pribrojnika). „Strogo rečeno, ako su a, b i c prirodni brojevi, izraz $a + b + c$ nema značenje dok mu ne damo značenje (dok ga ne definiramo)“ (Hafstrom,

[14] Učenici često koriste izraz 'ne može se riješiti' za zadatke koji nemaju rješenja u njima poznatom skupu brojeva, u nižim razredima osnovne škole to je skup prirodnih brojeva.

1961:9). Tako izrazu $a + b + c$ pridajemo značenje $(a + b) + c$, izraz $a + b + c + d$ definiramo kao $(a + b + c) + d$, što dalje podrazumijeva $[(a + b) + c] + d$ itd. Isto vrijedi i za oduzimanje, koje možemo promatrati kao dodavanje negativnog pribrojnika. Iz ovoga slijedi da u našem primjeru ($34 + 48 - 15$ ili $48 + 34 - 15$), ako nije naznačeno drugačije, prvo zbrajamo brojeve 34 i 48 (nevažno kojim redoslijedom), a tada od zbroja oduzimamo broj 15. Smatram da učenici drugog razreda uz učiteljevu pomoć mogu ovako tumačiti opisani primjer te ga uspješno riješiti bez računanja.

U drugome zadatku Priloga 1 učenici trebaju usporediti opsege dvaju sukladnih trokuta. Duljine njihovih stranica navedene su drugačijim redoslijedom, no učenik može primijetiti da oba trokuta imaju jednake duljine stranica, što znači i jednak opseg. Opseg trokuta uključen je u gradivo četvrtog razreda osnovne škole. Do tada su učenici već trebali ovladati svojstvima računskih radnji, no njih ne treba izostaviti iz ostale nastavne građe. Trebamo pokazati učenicima da zakoni koje su usvojili imaju široku primjenu u aritmetici, ali i u ostalim područjima matematike, kao i u svakodnevnim životnim situacijama. Zato je važno u ovakvim prilikama uvrstiti poneki zadatak gdje učenici neće morati izvoditi niz postupaka koje su uvježbavali, već mogu primjenom jednostavnih svojstava vrlo lako i brzo riješiti zadatak. Ovakvim zadatcima ne samo da razvijamo divergentno mišljenje[15] učenika, već stvaramo opuštenu atmosferu u kojoj učenici osjećaju da matematika nije zahtjevna ako joj pristupimo s razumijevanjem. Učenici ovakve zadatke često doživljavaju kao trik-pitanja ili okidače u nastavi koji razbijaju radnu atmosferu, zanimljivi su i opuštajući, a u budućnosti učenici pokušavaju pronaći dosjetku kojom mogu riješiti neki drugi zadatak.

Treći je zadatak sličan prvomu. Sada su izrazi već izjednačeni, a učenici trebaju upisati brojeve koji nedostaju, koje također mogu jednostavnije odrediti usporedbom.

Četvrti zadatak traži da se odredi koji brojevi (točnije, treba navesti pet brojeva) mogu doći na prazno mjesto u nejednakosti $34 + 29 + 19 < \boxed{} + 19 + 34$. Na temelju svojstva komutativnosti, ova bi dva izraza bila jednaka kad bismo u kvadratić upisali broj 29. Lijevi će izraz biti manji od desnoga ako u kvadratić upišemo bilo koji broj veći od 29. Ovakvi su zadatci poželjni u dodatnoj nastavi matematike, ali možemo ih zadati i učenicima na redovnoj nastavi uz uputu da ga pokušaju riješiti bez računanja.

[15] Divergentno mišljenje odlikuje originalnost, razmišljanje u različitim pravcima; ono potiče kreativnost, stvaranje nečeg novog.

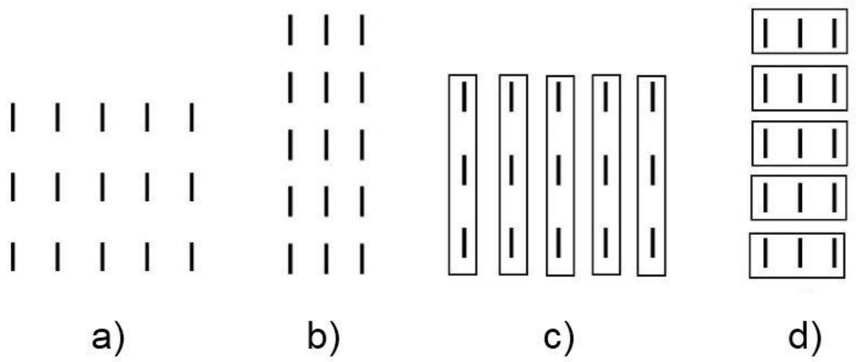
Smatram da se svi zadatci iz Priloga 1 mogu uspješno odraditi na redovnoj nastavi matematike. Ono što trebamo izbjegavati jesu duge procedure i zamorni računi, a zadatci iz Priloga 1 nešto su čemu, kao učitelji, trebamo težiti u nastavi matematike.

6. SVOJSTVA MNOŽENJA U SKUPU ℕ

U drugome razredu osnovne škole učenici se prvi put susreću s množenjem prirodnih brojeva. Ova im računska radnja omogućuje da kraće zapišu zbrajanje jednakih pribrojnika. Tako izraz $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ opisujemo kao 5 puta po 3 te zapisujemo $5 \cdot 3$. Brojevi koje množimo zovu se faktori (prvi faktor nazivamo množenikom, a drugi množiteljem). Razmišljamo li o množenju kao zbrajanju jednakih pribrojnika, drugi nam faktor govori o kojem se pribrojniku radi, a prvi koliko takvih pribrojnika imamo. Ako svaki pribrojnik promatramo kao kardinalni broj nekog skupa, tada možemo reći da prvi faktor određuje broj jednakobrojnih skupova, dok drugi određuje kardinalni broj svakog od tih skupova, tj. broj elemenata svakog od tih skupova, kao što je prikazano na slici 8.

Slika 8. **Značenje faktora**

Neke od prvih aktivnosti s kojima se učenici susreću pri usvajanju množenja jesu zapisivanje zbrajanja jednakih pribrojnika kao množenje i obrnuto, prepoznavanje zbrajanja jednakih pribrojnika u zapisu množenja. Ove aktivnosti od velike su važnosti za kasnije usvajanje svih svojstava množenja. Osim zapisivanja zbrajanja i množenja matematičkim simbolima, od učenika se traži i da crtežom interpretira podatke u zadatku. Na primjer, izraz $5 \cdot 3$ treba zapisati kao $3 + 3 + 3 + 3 + 3$, a potom i nacrtati pet skupova od kojih svaki sadrži tri elementa. Na slici 9 nalaze se primjeri dobro i loše crtežom interpretiranih zadataka.



Slika 9. **Slikovni prikaz množenja**

Crteži prikazani pod *a)* i *b)* ne pokazuju razumijevanje koncepta zbrajanja, odnosno funkcije prvog i drugog faktora. Ovi prikazi nisu dovoljno zorni jer u njima nisu naznačeni (jednakobrojni) skupovi. Crtež *a)* možemo opisati kao tri reda po pet štapića ($3 \cdot 5$) ili pet stupaca po tri štapića ($5 \cdot 3$). Na isti je način neodređen i prikaz *b)* koji sadrži pet redova po tri štapića ($5 \cdot 3$) ili tri stupca po pet štapića ($3 \cdot 5$). Kako bismo bili sigurni da učenik razumije što označavamo prvim, a što drugim faktorom, potrebno je inzistirati na naznačenim (zaokruženim, uokvirenim) skupovima kao što je to slučaj u primjerima *c)* i *d)*. Ova dva primjera nedvojbeno prikazuju izraz $5 \cdot 3$; u primjeru *c)* štapići su raspoređeni u pet stupaca (po tri štapića u svakome), dok je u primjeru *d)* jednak broj štapića raspoređen u pet redova, od kojih svaki sadrži po tri štapića. Nevažno je hoćemo li skupove prikazivati u redovima ili stupcima.

6.1. Zakoni komutativnosti i asocijativnosti množenja

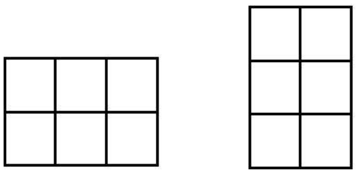
Množenje prirodnih brojeva učenici usvajaju učenjem tablice množenja. U početku tablica množenja sadrži umnoške svakog od elemenata iz skupa $\mathbb{N}_0$ manjih od 10 ili jednakih broju 10 sa svakim od elemenata istoga skupa, što znači da se u njoj nalazi 121 umnožak. Najveći je među njima 100, dobiven umnoškom $10 \cdot 10$. Međutim, broj umnožaka koje treba naučiti napamet manji je od polovine navedenog broja istih, upravo zahvaljujući svojstvu komutativnosti množenja, ali i svojstvima množenja brojevima 0 i 1. Nakon upoznavanja učenika s množenjem kao zbrajanjem jednakih pribrojnika slijedi obrada komutativnosti. Usvajanjem ovog svojstva učenici uočavaju da im je učenje tablice množenja olakšano; ako znaju koliko je $3 \cdot 8$, ne moraju učiti koliko je $8 \cdot 3$, već samo zamijeniti mjesta faktorima i riješiti već poznati zadatak. Đuro i Jasenka Đurović (1987) u priručniku za učitelje savjetuju da pri obradi množenja prvi faktor (množenik) bude apstraktan, a da drugi faktor (množitelj) konkretiziramo kako bismo množenje mogli prikazati kao zbrajanje jednakih pribrojnika. Isto tako, autori tvrde da „o komutativnosti množenja možemo govoriti samo ako nijedan od dva broja koja se množe nije konkretan" (Đurović i Đurović, 1987:79). Kao primjer navode sintagmu '2 puta po 2 jabuke' čije nam je značenje jasno, za razliku od izraza '2 jabuke puta po 2'. Zato pri obradi komutativnosti predlažu usporedbu vrijednosti apstraktnih izraza, primjerice $2 \cdot 4$ i $4 \cdot 2$, konkretiziranjem množitelja u oba slučaja, odnosno promatranjem 8 kvadratića kao 4 puta po 2 (kvadratića) i 2 puta po 4 (kvadratića). Oba su izraza prikazana istom ilustracijom, što znači da imaju jednaku vrijednost, samo tu ilustraciju drugačije promatramo. U prvome slučaju imamo, na primjer, 2 reda po 4 kvadratića, a u drugome 4 stupca po 2 kvadratića. „Znak jednakosti u računskim radnjama ne smijemo shvatiti u smislu isto, već ekvivalentno" (Duda, 1964:76). Zamislimo sljedeću situaciju: za samoposlužni aparat za kavu trebaju nam kovanice (kava stoji 4 kn, a aparat ne vraća ostatak novca). Nije isto hoćemo li novčanicu od 10 kn zamijeniti za dvije kovanice od pet kuna ($2 \cdot 5$) ili pet kovanica od dvije kune ($5 \cdot 2$), jer ćemo u prvome slučaju kavu platiti kunu više. Isti problem susrećemo i ako trebamo kovanice za kolica za kupovinu koja primaju samo kovanice od pet kuna. Važno je hoćemo li prodavačicu zamoliti da nam novčanicu od 10 kn razmijeni u $2 \cdot 5$ (kuna) ili $5 \cdot 2$ (kune). Iako ovi primjeri iz svakodnevnog života pokazuju razumijevanje koncepta zbrajanja, dopušteno je olakšati si računanje zamjenom mjesta faktora zahvaljujući zakonu komutativnosti za množenje. Tako je lakše predočiti si, pa time i izračunati, koliko je $2 \cdot 43$, nego $43 \cdot 2$. Prisjetimo se COL metode zbrajanja prirodnih brojeva koja podrazumijeva prebrojavanje od većeg pribrojnika kako bi se skratilo vrijeme računanja. Slično je i kod množenja. Pri računanju $3 \cdot 2$ zamišljamo 'tri dvojke' te nema potrebe primjenjivati svojstvo komutativnosti kako bismo postupak zbrajanja $2 + 2 + 2$ skratili u $3 + 3$ ('dvije trojke'). U oba slučaja radi se o svega nekoliko pribrojnika te su oba postupka podjednako zahtjevna. Štoviše, učenici vrlo rano znaju brzo brojiti po dva, odnosno tri ('izrecitirati' prvih nekoliko prirodnih višekratnika broja 2: $2, 4, 6, 8, \dots$ ili 3: $3, 6, 9, 12, \dots$), stoga u tom procesu mogu biti brzi čak i kad se radi o većem broju pribrojnika.

Međutim, primjena svojstva komutativnosti ponekad je korisna čak i u slučaju uzastopnih brojeva, čak i manjih od 10, unatoč tomu što zamjena mjesta faktora smanjuje ili povećava broj pribrojnika samo za 1. Promotrimo zadatak $5 \cdot 4$. Mentalna slika koju zamišljamo jest pet pribrojnika 4. Zamjenom mjesta faktora ($4 \cdot 5$) ona se mijenja u četiri pribrojnika 5. Ovdje nam računanje nije toliko olakšano smanjenjem pribrojnika, koliko samom njihovom promjenom. Učenicima je lakše brojiti po 5, nego po 4, stoga će brže zaključiti koliko vrijede 'četiri petice' (pet-deset-petnaest-dvadeset), nego 'pet četvorki'. Ovo je posljedica čestog brojenja po pet u svakodnevnome životu: brojenje minuta na analognome satu, prebrojavanje pomoću prstiju ruku, brojenje kovanica od 5 kuna, a i činjenice da višekratnici broja 5 završavaju znamenkom 0 ili 5, koje je ponovno lakše međusobno zbrajati, nego što je to slučaj s višekratnicima broja 4.

Najveću primjenu u računanju komutativnost ima tijekom množenja brojeva koji su dovoljno veliki da si ih ne možemo predočiti mentalnom slikom i jednostavno grupirati. Vratimo se već spomenutom primjeru $43 \cdot 2$. Zaista je teško predočiti si 43 pribrojnika 2 te ih grupirati i u mislima zbrojiti. Mentalna slika koju zapravo stvaramo je 'puno dvojki'; njihov točan broj ionako nam u tom trenutku ne znači mnogo. 43 pribrojnika možemo podijeliti na 4 puta po 10 i još 3. 10 pribrojnika 2 vrijede 20, četiri takve grupe vrijede $20 + 20 + 20 + 20 = 80$ te imamo još 3 pribrojnika 2, što vrijedi $2 + 2 + 2 = 6$. Konačno je rješenje $80 + 6 = 86$. Ovaj se postupak uvelike skraćuje zamjenom mjesta faktora te mentalnim predočavanjem izraza $2 \cdot 43$ što znači 43 i još 43, dakle 86.

Iz istog je razloga nekada praktično primijeniti svojstvo asocijativnosti množenja. U izrazu $3 \cdot 4 \cdot 5$ ne postoje zagrade, stoga računamo redom, slijeva nadesno. Taj je izraz, dakle, istovjetan izrazu $(3 \cdot 4) \cdot 5$, što bismo dalje računali kao $12 \cdot 5$. Već na prvi pogled primjećujemo da nam je lakše faktore udružiti na ovaj način: $3 \cdot (4 \cdot 5)$ jer ćemo brže izračunati koliko je $3 \cdot 20$, nego $12 \cdot 5$ (iz istih razloga iz kojih je u prethodnom odlomku jednostavnije zamijeniti mjesta faktorima).

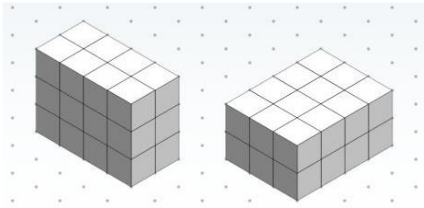
Svojstva komutativnosti i asocijativnosti učenicima možemo demonstrirati u ravnini, ali i u prostoru. Spomenuto prebrojavanje kvadratića u redovima i stupcima nije ništa drugo nego računanje površine pravokutnika. Promotrimo sliku 10. 2 puta po 3 kvadratića ili 3 puta po 2 kvadratića daju jednak rezultat: 6 kvadratića. Površina pravokutnika koji se sastoji od tako raspoređenih kvadratića, nanizanih jedan do drugoga, iznosi 6 površina jednoga kvadratića. Zaključujemo da pravokutnici dimenzija $2 \cdot 3$ (kvadratića) i $3 \cdot 2$ (kvadratića) imaju jednake površine.



***Slika 10.* Komutativnost množenja**

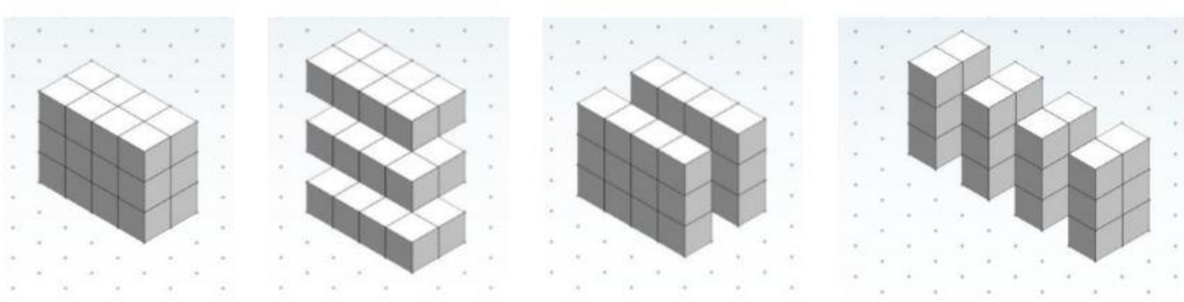
U nižim razredima osnovne škole učenici površine likova računaju preko površine pravokutnika. Pravokutnik je jedini lik kojemu znaju odrediti površinu ako su mu poznate duljine stranica. Naime, površina pravokutnika zasniva se na određivanju broja jediničnih kvadrata od kojih se on sastoji, a možemo ju dobiti umnoškom broja kvadrata u svakome redu i broja kvadrata u svakome stupcu. Ukupna površina pravokutnika jednaka je broju tih jediničnih kvadrata uz navođenje jedinice mjerenja, navode Polonijo i Šikić (1986). Jedinica mjerenja koja se kasnije uvodi jest kvadratni centimetar koji opisujemo kao površinu kvadrata čija je duljina stranice 1 cm. Kasnije se uvode i ostale mjerne jedinice pa se time i površina pravokutnika može računati kao umnožak duljina susjednih stranica u decimetrima, metrima itd.

Na slici 11 nalaze se dva kvadra složena od kocaka. Usporedit ćemo njihove volumene, iako pri obradi svojstava množenja to nećemo eksplicitno izreći, već ćemo tražiti od učenika da odrede od koliko su kocaka složena ova tijela[16].



Slika 11. **Asocijativnost množenja**

Prije računanja ili prebrojavanja, u svrhu usporedbe ovih dvaju kvadara, od učenika možemo tražiti da procijene koji od njih sadrži više kocaka. Nakon ponuđenih odgovora i obrazloženja (koja su korisna jer upućuju na dimenzije kojima učenici eventualno pridaju veću važnost) slijedi određivanje stvarnog broja kocaka u svakome od dvaju kvadara. Učenike potičemo da do odgovora dođu na najjednostavniji i najbrži način. Riješe li zadatak prebrojavanjem kocaka, upitamo ih bi li na isti način riješili zadatak i da je kvadar složen od, primjerice, 100 ili više kocaka. Ovim ih pitanjem navodimo na korištenje 'prečaca', odnosno odgovarajućih računskih radnji. Pretpostavljamo više postavljenih računa za prvi kvadar, a koji svi daju jednak rezultat. Slika 12 prikazuje podjelu prvoga kvadra na slojeve, i to na tri različita načina. U zagradi je izraz kojim računamo broj kocaka u jednome sloju, a faktor ispred zagrade predstavlja broj takvih slojeva.



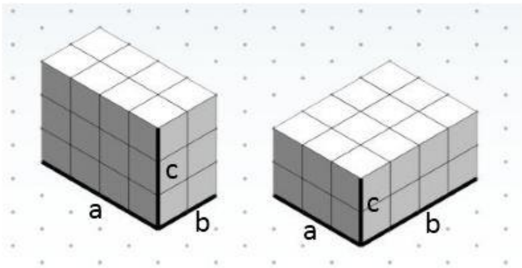
$3 \cdot (4 \cdot 2)$	$2 \cdot (3 \cdot 4)$	$4 \cdot (3 \cdot 2)$
$3 \cdot (2 \cdot 4)$	$2 \cdot (4 \cdot 3)$	$4 \cdot (2 \cdot 3)$

Slika 12. **Primjena zakona asocijativnosti i komutativnosti množenja u računanju volumena kvadra**

[16] Svojstva množenja obrađuju se u drugome razredu, a površina pravokutnika i volumen kvadra tek u četvrtom razredu osnovne škole.

Različiti izrazi posljedica su različitih pristupa prebrojavanju kocaka kvadra, a zbog zakona asocijativnosti i komutativnosti množenja oni daju jednake rezultate. Kao i kod zbrajanja, svojstvo asocijativnosti ne omogućuje zamjenu mjesta operanada, njihov redoslijed, nego samo redoslijed kojim ćemo računati. Udružimo li faktore, a da smo pri tome promijenili njihov redoslijed, uz asocijativnost smo primijenili i komutativnost množenja.

Usporedimo sada volumene (izražene brojem kocaka) dvaju kvadara sa slike 10.



***Slika 13.* Volumen kvadra**

Učenik koji je na određen način postavio račun za broj kocaka prvoga kvadra vjerojatno će dimenzije drugoga kvadra odrediti na isti način, tj. os duž koje je promatrao duljinu prvog kvadra vjerojatno će koristiti i za određivanje duljine drugoga (pa tako i za ostale dimenzije). Pretpostavimo da učenik oba kvadra dijeli na a slojeva. Tada je $b \cdot c$ broj kocaka koje se nalaze u svakome sloju, a konačan broj kocaka jednak je $a \cdot (b \cdot c)$. Broj kocaka prvoga kvadra iznosi $4 \cdot (2 \cdot 3) = 4 \cdot 6 = 24$, a broj kocaka drugoga kvadra $3 \cdot (4 \cdot 2) = 3 \cdot 8 = 24$. Budući da smo izračunali da oba kvadra sadrže jednak broj kocaka, a u oba smo računa množili iste brojeve, samo na drugačije načine, pokazali smo da umnožak ne ovisi o redoslijedu faktora, niti o redoslijedu kojim ćemo ih međusobno množiti. Ovim smo konkretnim primjerom pokazali da za množenje vrijede zakoni komutativnosti i asocijativnosti. Primjenjujući svojstva asocijativnosti i komutativnosti množenja promotrimo čemu je jednak volumen prvoga kvadra.

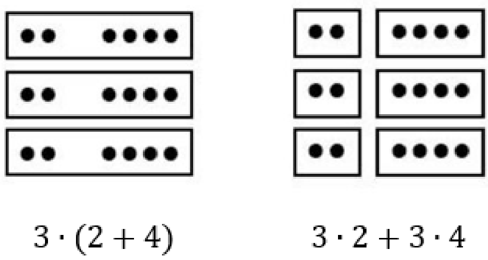
$$4 \cdot (2 \cdot 3) = (4 \cdot 2) \cdot 3 \qquad \text{prema teoremu 5}$$

$$= 3 \cdot (4 \cdot 2) \qquad \text{prema teoremu 3}$$

Ovime smo pokazali jednakost volumena ovih dvaju kvadara. Ti su kvadri međusobno sukladni, jedan možemo dobiti rotacijom drugoga u prostoru.

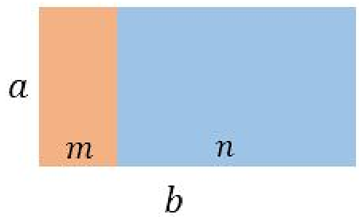
6.2. Zakon distributivnosti množenja prema zbrajanju

Zakon distributivnosti često se primjenjuje u rješavanju zadataka u svim odgojno-obrazovnim ciklusima. Njegova se primjena kod većine učenika razvila do automatizacije u rješavanju jednadžbi s nepoznanicama, zbrajanju razlomaka jednakih nazivnika, rješavanju zadataka grafičkom metodom i sl. Budući da nazivi zakona računskih radnji u *Nastavnom planu i programu za osnovnu školu* nisu eksplicitno navedeni, ove sadržaje prepoznajemo u nastavnim jedinicama *Množenje zbroja brojem* i *Dijeljenje zbroja brojem*. Isti rezultat dobijemo ako pribrojnike zbrojimo pa dobiveni zbroj pomnožimo (ili podijelimo) nekim brojem ili ako svaki od pribrojnika pomnožimo (ili podijelimo) tim brojem, a zatim dobivene rezultate (umnoške, odnosno količnike) zbrojimo. Učenici do ovakvog zaključka dolaze induktivno; potrebno je potaknuti ih na rješavanje što većeg broja primjera kako bi utvrdili da zakon vrijedi za sve prirodne brojeve.



Slika 14. **Slikovni prikaz distributivnosti množenja prema zbrajanju**

Svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju grafički možemo prikazati računajući površinu pravokutnika podijeljenog na dva manja pravokutnika, kao na slici 15.



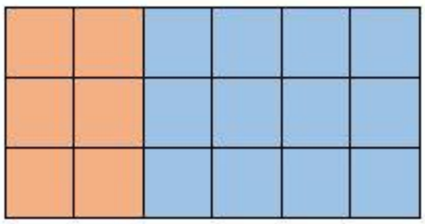
Slika 15. **Grafički prikaz distributivnosti množenja prema zbrajanju**

Površina velikog pravokutnika jednaka je umnošku duljina njegovih stranica ($a \cdot b$). Budući da je stranica duljine b podijeljena na dva dijela te je $b = m + n$, površina velikog pravokutnika iznosi $a \cdot (m + n)$. Međutim, ta površina jednaka je zbroju površina dvaju manjih pravokutnika, tj. površina velikog pravokutnika može se izračunati i na ovaj način: $a \cdot m + a \cdot n$. Budući da se radi o istome pravokutniku, samo drugačijem načinu računanja njegove površine, zaključujemo da je $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$. Provjerimo ovu jednakost i s konkretnim brojevima. Neka je $a = 2$ cm duljina jedne stranice, a $b = 5$ cm duljina druge stranice koja je, dijeljenjem većeg pravokutnika na dva manja, podijeljena na dijelove duljina 1 cm (stranica duljine m prvog manjeg pravokutnika) i 4 cm (stranica duljine n drugog manjeg pravokutnika). Površinu velikog pravokutnika računamo na dva načina:

$$\begin{aligned} a \cdot (m + n) &= 2 \cdot (1 + 4) \\ &= 2 \cdot 5 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \cdot m + a \cdot n &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \\ &= 2 + 8 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Dobiveni jednaki rezultati pokazuju da su i početne formule za izračunavanje površine ekvivalentne. S učenicima ovakvu provjeru možemo napraviti tek u četvrtome razredu kada su oni već upoznati s načinom izračunavanja površine pravokutnika. Želimo li površinom pravokutnika demonstrirati svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju pri obradi tog svojstva u trećem razredu, možemo to učiniti prebrojavanjem jediničnih kvadrata od kojih je pravokutnik sastavljen. Na slici 16 nalazi se pravokutnik podijeljen na dva dijela (crveni i plavi pravokutnik). Sastavljen je od 3 reda po 6 kvadrata ili 6 stupaca po 3 kvadrata, tj. od $3 \cdot 6 = 6 \cdot 3 = 18$ kvadrata. Površina velikog pravokutnika jednaka je površini 18 jediničnih kvadrata.



Slika 16. **Demonstracija distributivnosti množenja prema zbrajanju pomoću površine pravokutnika**

Određujemo li broj jediničnih kvadrata ovoga pravokutnika kao zbroj kvadrata u crvenom i plavom pravokutniku, računat ćemo ovako: crveni se pravokutnik sastoji od 3 reda po 2 kvadrata, a plavi od 3 reda po 4 kvadrata. Ukupno je to $3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 6 + 12 = 18$ kvadrata. Na ovome je primjeru jednostavno pokazati da je množenje prema zbrajanju distributivno i slijeva i zdesna. Budući da je množenje komutativno, broj kvadrata u crvenome pravokutniku možemo računati i kao $2 \cdot 3$ (2 stupca po 3 kvadrata). Na isti je način plavi pravokutnik sastavljen od 4 stupca po 3 kvadrata, odnosno $4 \cdot 3$ kvadrata. Ukupno je to $2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 6 + 12 = 18$ kvadrata. Promatramo li stupce velikog pravokutnika, vidimo da ih imamo 6, a svaki od njih sadrži 3 kvadrata. Ukupno je to $6 \cdot 3 = 18$ kvadrata.

$3 \cdot (2 + 4) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4$ LIJEVA DISTRIBUTIVNOST MNOŽENJA PREMA ZBRAJANJU

$(2 + 4) \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3$ DESNA DISTRIBUTIVNOST MNOŽENJA PREMA ZBRAJANJU

Budući da je množenje prema zbrajanju distributivno i s lijeve i s desne strane, jednostavno kažemo da je množenje distributivno prema zbrajanju.

Na istome bismo primjeru mogli prikazati i distributivnost množenja prema oduzimanju. Broj kvadratića plavog pravokutnika jednak je $4 \cdot 3 = 12$, pri čemu je prvi faktor razlika između broja kvadratića velikog pravokutnika i broja kvadratića crvenog pravokutnika. Isti ćemo rezultat dobiti i oduzimanjem broja kvadratića crvenog pravokutnika od broja kvadratića najvećeg pravokutnika. Jednakost rezultata pokazuje distributivnost množenja prema oduzimanju:

$(6 - 2) \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$

$6 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 18 - 6 = 12$

$(6 - 2) \cdot 3 = 6 \cdot 3 - 2 \cdot 3$

Ovime smo pokazali desnu distributivnost množenja prema oduzimanju, a budući da je množenje komutativna operacija, ono je prema oduzimanju distributivno i s lijeve strane.
Zakon distributivnosti množenja prema zbrajanju obrađuje se u trećem razredu osnovne škole, neposredno prije obrade množenja dvoznamenkastih brojeva brojevima 10 i 100. Uvođenjem ovog zakona učenicima se omogućuje da nove matematičke probleme, poput množenja dvoznamenkastih brojeva brojem 10, riješe na već poznati način. Pripisivanje nula zdesna broju množenom dekadskom jedinicom tek je posljedica generalizacije nakon većeg broja konkretnih primjera zadataka koje rješavamo primjenjujući svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju. Učenicima se prvo objašnjava množenje višekratnika broja 10 brojem 10 pomoću svojstva asocijativnosti i to na sljedeći način:

$$\begin{aligned} 40 \cdot 10 &= (4 \cdot 10) \cdot 10 \\ &= 4 \cdot (10 \cdot 10) \\ &= 4 \cdot 100 \end{aligned}$$

$= 400$

Učenici će nakon nekoliko riješenih primjera uočiti mogućnost korištenja 'prečaca', odnosno pripisivanja zdesna nule dvoznamenkastome višekratniku broja 10 pri množenju brojem 10.

Ostale dvoznamenkaste brojeve množimo brojem 10 na sličan način, ali tako da dvoznamenkasti broj rastavimo na zbroj desetica i jedinica ($\overline{ab} = 10a + b$). Na temelju svojstva distributivnosti svaki pribrojnik zbroja zatim množimo brojem 10, a dobivene umnoške (produkte) zbrojimo.

$$
\begin{aligned}
47 \cdot 10 &= (40 + 7) \cdot 10 \\
&= 40 \cdot 10 + 7 \cdot 10 \\
&= 400 + 70 \\
&= 470
\end{aligned}
$$

Na ovaj smo način novi računski problem (množenje dvoznamenkastog broja brojem 10), primjenom svojstava računskih radnji, preoblikovali u onaj čiji oblik znamo riješiti (množenje višekratnika broja 10 brojem 10 i množenje jednoznamenkastog broja brojem 10). Na osnovi više riješenih zadataka novoga gradiva rastavljanjem na poznate probleme uočavamo pravilo množenja dvoznamenkastog broja brojem 10 (pripisivanje nule). Kasnije je učenicima dopušteno koristiti taj kraći način računanja. Međutim, dužim načinom nismo samo dokazali relevantnost rezultata dobivenog pripisivanjem nule pri množenju brojem 10, već ga poučavamo jer predstavlja temelj usmenog računanja. O usmenom i pisanom računanju nešto više u poglavlju 7.

Margita Pavleković (2008) kao primjere teškoća koje učenicima predstavlja redoslijed računskih radnji donosi rezultate istraživanja provedenog 1988. godine među učenicima petih razreda. Među točnim rješenjima posebno ističe ona dvaju učenika koji su zadatak $8 \cdot 14 - 14 + 16 \cdot 0$ riješili ovako:

$$8 \cdot 14 - 14 + 16 \cdot 0 = 7 \cdot 14 + 0 = 98$$

Ova „dva učenika pokazala su da pored znanja posjeduju pronicljivost“ (Pavleković, 2008:91). U pozadini njihove pronicljivosti leži usvojenost zakona distributivnosti množenja prema oduzimanju koji učenicima omogućuje interpretaciju izraza $8 \cdot 14 - 14$ na sljedeći način: ako od 8 'četrnaestica' oduzmemo jednu ('četrnaesticu'), ostat će nam 7 ('četrnaestica'). Snalažljivost ovih učenika omogućila im je brže, lakše i kraće računanje.

$$8 \cdot 14 - 14 = 8 \cdot 14 - 1 \cdot 14$$

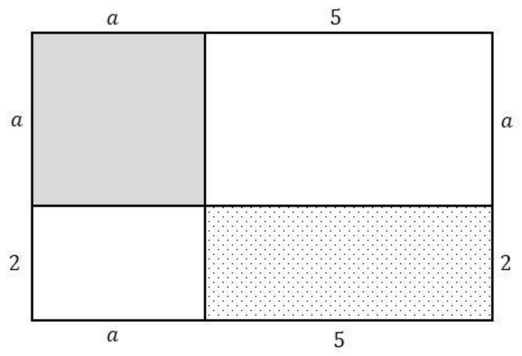
$$= (8 - 1) \cdot 14$$

6.3. Zadatci za ponavljanje i provjeru

U prilogu 2 predloženi su zadatci kojima učitelj može provjeriti učenikovo konceptualno razumijevanje svojstava množenja. Analogno zadatcima iz priloga 1, prvi zadatak omogućuje usporedbu vrijednosti dvaju izraza bez nalaženja njihovih rezultata. Usporedba je omogućena prepoznavanjem svojstava množenja kojima jedan izraz možemo transformirati u drugi (zbog zakona komutativnosti za zbrajanje i množenje vrijedi $12 \cdot 8 + 5 \cdot 13 = 5 \cdot 13 + 8 \cdot 12$), zatim razumijevanjem odnosa dio-cjelina (rastavljanjem cjeline na ekvivalentan izraz te primjenom svojstava asocijativnosti i komutativnosti vrijedi $17 \cdot 24 \cdot 5 = 4 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 6$). Osim ekvivalentnih izraza, bez nalaženja rezultata moguće je predvidjeti i koji izraz ima veću vrijednost. U prvom odgojno-obrazovnom ciklusu učenici množenje prirodnim brojevima većim od 1 doživljavaju kao operaciju koja rezultira povećanjem vrijednosti početnog izraza. Stoga u izrazu $(3 + 5 + 7) \cdot 8$ treba prepoznati uvećanje (8 puta) svakoga od pribrojnika 3, 5 i 7, što je posljedica zakona distributivnosti množenja prema zbrajanju, nasuprot povećanju samo jednoga od pribrojnika u izrazu $3 + 5 + 7 \cdot 8$, što pak navodi na zaključak da prvi izraz ima veću vrijednost od drugoga.

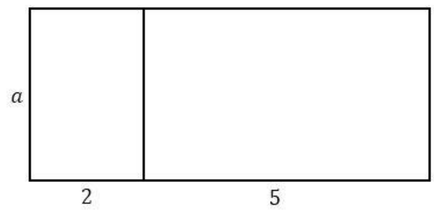
Drugi zadatak također je moguće riješiti bez računanja i usporedbe rezultata dvaju izraza. Zbog reverzibilnosti zakona distributivnosti vrijedi $a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c$, što znači sljedeće: uvećamo li svaki od pribrojnika jednak broj puta, toliko će se puta povećati i zbroj.

Treći zadatak u prilogu 2 temelji se na primjeni svojstva distributivnosti u rješavanju geometrijskih problema. Naime, produljimo li jedan par paralelnih stranica kvadrata za 5 cm, a drugi par za 2 cm, dobit ćemo pravokutnik kakav je prikazan na slici 17.



Slika 17. **Grafički prikaz zadatka 3 iz priloga 2**

Razlika u površinama novodobivenog pravokutnika i početnog kvadrata, koja iznosi 31 cm^2, sastoji se od površna triju pravokutnika čije su duljine stranica označene na slici. Površinu jednoga od njih jednostavno je izračunati, budući da su poznate duljine obiju njegovih stranica. Ona iznosi 10 cm^2, što znači da je ukupna površina preostalih dvaju pravokutnika jednaka 21 cm^2 $(31 - 10)$. U nižim razredima osnovne škole učenici još nisu upoznati s jednadžbama, stoga ovaj problem $(2 \cdot a + 5 \cdot a = 21)$ dalje mogu riješiti metodom uzastopnoga približavanja (nazivamo ju još i metodom pokušaja i pogrješaka) ili primjenom zakona distributivnosti množenja prema zbrajanju. Potonja brže dovodi do rješenja, ali zahtijeva postavljanje ovih dvaju pravokutnika tako da imaju zajedničku stranicu, što je moguće zbog činjenice da oba pravokutnika imaju stranicu nepoznate duljine a. Na slici 20 vidljivo je da je površina dvaju pravokutnika jednaka $a \cdot (2 + 5)$, odnosno $a \cdot 7$. Budući da je rezultat ovoga izraza učenicima poznat, lako je izračunati nepoznati faktor $(a = 21 : 7 = 3)$. Postavljanjem dvaju pravokutnika, površina $a \cdot 2$ i $a \cdot 5$, tako da imaju zajedničku stranicu u pravokutnik površine $a \cdot 7$ primijenili smo zakon distributivnosti množenja prema zbrajanju.



Slika 18. **Grafički prikaz primjene svojstva distributivnosti u zadatku 3 iz priloga 2**

Četvrti je zadatak čest na natjecanjima i dodatnoj nastavi matematike. Zbrajanje prvih n prirodnih brojeva možemo jednostavno riješiti primjenom komutativnosti i asocijativnosti zbrajanja kako bismo združili prvi pribrojnik s posljednjim, drugi s pretposljednjim itd., jer svi takvi parovi daju istu sumu. Treba samo odrediti koliko ima takvih parova i taj broj pomnožiti sumom svakog para. Zadatak iz priloga 2 nešto je složeniji; zbrajaju se samo parni prirodni brojevi, stoga prije zakona komutativnosti i asocijativnosti zbrajanja možemo primijeniti zakon distributivnosti množenja prema zbrajanju:

$$\begin{aligned}
2+4+6+8+\cdots+100 &= 1\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot 2+4\cdot 2+\cdots+50\cdot 2\\
&= (1+2+3+4+\cdots+50)\cdot 2\\
&= [(1+50)+(2+49)+(3+48)+\cdots+(25+26)]\cdot 2\\
&= (25\cdot 51)\cdot 2\\
&= 1275\cdot 2\\
&= 2550
\end{aligned}$$

Peti je zadatak posebno zanimljiv jer se može riješiti grafičko-aritmetičkom metodom, ali tek nakon primjene svojstva komutativnosti množenja. Prikažimo grafički broj prodanih cvjetova. Broj krizantema prikažimo kvadratićem. Tada broj tulipana možemo prikazati dvama kvadratićima, a broj ruža trima kvadratićima. Zarada od prodaje krizantema jednaka je 'kvadratić puta po 9', zarada od prodaje tulipana jednaka je 'dva kvadratića puta po 8', a zarada od prodaje ruža je 'tri kvadratića puta po 10'. Ništa od navedenog ne možemo prikazati grafički budući da navedeni izrazi nemaju smisla. Prisjetimo se konkretizacije množitelja. Možemo ju postići primjenom svojstva komutativnosti množenja i sada možemo grafički prikazati '9 puta po kvadratić', '8 puta po dva kvadratića' i '10 puta po tri kvadratića'. Ukupna zarada (55 kvadratića) iznosi 275000 kn. Sada je lako izračunati da kvadratić zamjenjuje broj 5000. Zarada od prodaje tulipana iznosi $2\cdot 8\cdot 5000$ kuna, od prodaje krizantema $9\cdot 5000$ kuna, a od prodaje ruža $3\cdot 10\cdot 5000$ kuna. Prodano je, dakle, $2\cdot 5000=10000$ tulipana, 5000 krizantema i $3\cdot 5000=15000$ ruža.

Zadatci predloženi u prilogu 2 predstavljaju probleme koji potiču usvajanje zakona računskih radnji. Budući da ih učenik može riješiti bez primjene ovih zakona (čak i posljednji zadatak; može se riješiti metodom uzastopnog približavanja) bilo bi korisno pratiti rad učenika te poticati ga na korištenje 'prečaca' za lakše i brže rješavanje zadataka ili iznalaženje novih načina. Svi se zadatci iz priloga 2 mogu koristiti za rad s učenicima trećeg razreda nakon obrade svojstva distributivnosti množenja prema zbrajanju, odnosno množenja zbroja brojem. Sastavljanje sličnih zadataka poželjno je nastaviti i nakon trećeg razreda kako bi se nastavilo kod učenika razvijati konceptualno razumijevanje matematičkih principa.

7. USMENO I PISANO RAČUNANJE

Već više od 200 godina metodika nastave matematike razlikuje usmeno i pisano računanje. Ova dva termina označavaju različite postupke izračunavanja rezultata zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, a razlikuju se upravo u metodi računanja. Markovac i Benčić (1974) ne smatraju ove termine najprimjerenijima, upozoravajući na nepreciznost objašnjavanja pojmovnog sadržaja koji bi se njima trebao izraziti: „izraz usmeno računanje upućuje na pomisao da se račun izvodi napamet, usmeno, bez zapisivanja, naprotiv, izraz pismeno računanje ukazuje da se radi samo pismeno" (Markovac i Benčić, 1974:64). Međutim, usmeno računanje može sadržavati elemente pisanog (zapisivanje djelomičnih rezultata) i, obrnuto, pisano računanje sadrži elemente usmenog računanja (neki se djelomični rezultati izračunavaju napamet, usmeno). Usmeno je računanje takav postupak računanja kojim se zadani operandi na različite načine rastavljaju i sastavljaju kako bi se lakše došlo do rješenja. Pritom se neke radnje izvode napamet, a djelomični se rezultati mogu zapisati. Načini rastavljanja brojeva nisu strogo određeni, tj. ne postoji određeni postupak raščlanjivanja zadanih brojeva, već se odabire onaj kojim se najjednostavnije i najbrže dolazi do rezultata. Učenik ima slobodu odabira postupka koji će koristiti. Nasuprot usmenom, pisano računanje podrazumijeva propisani postupak koji vrlo malo može varirati. Promotrimo primjere usmenog i pisanog računanja.

Usmeno računanje:

$$\begin{aligned}25 \cdot 24 &= 25 \cdot (20 + 4)\\ &= 25 \cdot 20 + 25 \cdot 4\\ &= 500 + 100\\ &= 600\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}25 \cdot 24 &= 25 \cdot (4 \cdot 6)\\ &= (25 \cdot 4) \cdot 6\\ &= 100 \cdot 6\\ &= 600\end{aligned}$$

Pisano računanje:

$$\begin{array}{r}\underline{\;\;25 \cdot 24}\\ 50\;\;\;\;\\ \underline{+100\;\;\;}\\ 600\;\;\;\end{array}$$

Pisano se računanje usvaja u trećem razredu osnovne škole. Sve što su učenici učili o računskim radnjama u prvom i drugom razredu Markovac i Benčić (1974) nazivaju usmenim računanjem. „Usmeno je računanje pretpostavka pismenom računanju“ (Koletić, 1967:151). Budući da učenik sam bira put kojim će doći do rješenja, usmeno računanje djeluje na razvoj njegova mišljenja, inventivnost i općenito poboljšava učenikove psihičke funkcije. Budući da učenik pri usmenom računanju zapisuje samo djelomične rezultate, a cijelo vrijeme pamti način rastavljanja brojeva i odabrani postupak, ovaj način računanja potiče razvoj njegova pamćenja i sposobnosti koncentracije. Također je prednost ovakvoga načina računanja što nam za njegovo izvođenje nije potreban pribor za pisanje te je lako primjenljiv u svakodnevnom životu. Nasuprot tomu, pisano se računanje obavlja po točno određenim propisima, a zbog rada s mjesnim vrijednostima brojeva, smatraju Markovac i Benčić (1974), apstraktniji je i često dovodi do njegova formalističkog usvajanja. Međutim, to nikako ne znači da usmenom računanju treba dati prednost u odnosu na pisano u smislu da ono bude jedino koje se treba poučavati. Usmeno je računanje praktično u računanju s 'manjim' brojevima, primjerice do 100 ili 1000, ili s 'okruglim' brojevima $(3000 + 2816, 2500 \cdot 12)$, no računanje s 'velikim' brojevima olakšano je pisanim računanjem. Upravo se zato ono uvodi u trećem razredu, kada se skup prirodnih brojeva unutar kojega učenici računaju, proširuje preko prve stotice. Pisano nas računanje oslobađa pamćenja velikog broja djelomičnih rezultata. Omogućuje nam da proces računanja zaustavimo po potrebi te kasnije nastavimo, bez potrebe pamćenja procedure. U pisanom je računanju napor koji iziskuju mentalne operacije (mišljenje, pamćenje, predočavanje) puno manji nego u usmenom. No, ni navedene prednosti pisanog računanja ne znače da ono ima veću vrijednost naspram usmenog, kao ni obrnuto. Štoviše, uvijek je bolje znati doći do rješenja na dva načina te usporediti dobivene rezultate. Markovac i Benčić (1974) razlikuju primarnu simboliku brojeva s kojima operiramo u usmenom računanju $(400 + 50)$ od dvostruko simboliziranih objekata u pisanom računanju $(453 \cdot 67)$. Uz primarnu simboliku, tvrde ovi autori, pojavljuje se i simbolika mjesnog sustava (broj 4 na mjestu stotica predstavlja broj 400, broj 5 na mjestu desetica predstavlja broj 50 itd.) Da bi učenici razumjeli tu dvostruku simboliku, potrebno je polaziti od jednostavnijih primjera sadržanih u usmenom računanju.

Ono što se tijekom usmenog računanja događa jest rastavljanje dijelova na (još manje) dijelove koje zatim možemo brže i jednostavnije sastaviti u jednu cjelinu. Na stranici 46 takvo je rastavljanje prikazano na primjeru množenja te je zadatak vrlo jednostavno riješen primjenom svojstva distributivnosti. Pokažimo sada jedan primjer usmenog računanja koje olakšava zbrajanje:

$$15+4=(10+5)+4$$
$$=10+(5+4)$$
$$=10+9=19$$

Princip na kojemu se temelji brže i jednostavnije računanje u ovom je primjeru svojstvo asocijativnosti kojim smo, nakon rastavljanja broja 15 na pribrojnike 10 i 5, udružili pribrojnike 5 i 4 jer nam je to lako izračunati, a zatim smo desetici jednostavno dodali zbroj 9. Ovaj je primjer još jednom pokazao kako novi problem, rastavljanjem na dijelove te njihovim kombiniranjem, možemo preoblikovati i riješiti na nama već poznati način. Upravo se to i događa usmenim računanjem. Nakon što učenici automatiziraju zbrajanje jednoznamenkastih brojeva čiji zbroj nije veći od 10 te pribrajanje jednoznamenkastog broja broju 10, slijedi rastavljanje izraza na takve oblike, kao što je navedeno u primjeru. Kasnije, kada zbroj više ne bude u drugoj desetici, rastavit ćemo drugi (jednoznamenkasti) pribrojnik, npr.:

$$15+8=15+(5+3)$$
$$=(15+5)+3$$
$$=20+3$$
$$=23$$

Kada i ove radnje automatiziramo, neke nove probleme možemo rješavati pomoću njih. Ćurić i Markovac (1984) savjetuju:

> Pri obradi novog gradiva uvijek povezivati staro s novim, što se postiže naglašavanjem zajedničkih elemenata u starom i novom gradivu. Na primjer, pri obradi zbrajanja $534+5$ treba upozoriti da se rješavaju pomoću starog znanja $4+5$, odnosno $34+5$. Slično vrijedi i za ostalo novo gradivo. (49)

Nekada ćemo rastavljati oba broja s kojima operiramo, kao u ovome primjeru:

$$25+34=(20+5)+(30+4)$$
$$=(20+30)+(5+4)$$
$$=50+9=59$$

Način rastavljanja brojeva, dakle, biramo ovisno o zadatku. Cilj je odabrati postupak koji će nas najbrže i najjednostavnije dovesti do rezultata. Kako bismo mogli uspješno odabrati metodu računanja, potrebno je razumjeti koncepte i svojstva računskih operacija. Među prednostima usmenog računanja u odnosu na pisano, Marijan Koletić navodi sljedeću: „pri usmenu računanju postoji veća i svjesna primjena aritmetičkih zakonitosti i svojstava aritmetičkih operacija“ (Koletić, 1967:151). Usvojenost svojstava te primjena zakona računskih radnji preduvjet su uspješnom usmenom računanju koje vodi razumijevanju postupaka pisanoga računanja. Pomanjkanje razumijevanja koncepata računskih radnji i njihovih svojstava uzrokuje formalističko usvajanje apstraktih postupaka pisanog računanja. Učenicima koji ne posjeduju konceptualna znanja o brojevima, aritmetičkim operacijama i zakonima računskih radnji zasigurno je problem računanje s mjesnim vrijednostima brojeva. Ti učenici moraju ovladati svakim korakom pisanoga računanja, budući da su oni strogo propisani te svako odstupanje od istih može voditi netočnom rezultatu. Uče li se ti koraci napamet, bez razumijevanja navedenoga, još ih je teže upamtiti i ispraviti eventualne pogrješke u postupcima računanja. Čak i točan rezultat, koji je posljedica uvježbanog postupka bez njegova razumijevanja, sam je sebi svrha, ne pomaže daljnjem razvoju matematičkih vještina. U ovome radu nisu detaljno objašnjeni postupci pisanoga računanja jer nisu od posebne važnosti za sadržaj rada. Primjena zakona računskih radnji pokazana je na primjerima usmenog računanja, dok ih kod pisanog računanja ne primjenjujemo izravno, već su oni u pozadini operiranja s mjesnim vrijednostima brojeva. Važno je napomenuti da i kod pisanoga računanja postoji više načina na koje možemo pristupiti rješavanju (tablice, potpisivanje brojeva i sl.), međutim, svaki od njih zahtijeva točno izveden određeni algoritam. Pogrješka pri izvršavanju jednog takvog algoritma, kao posljedica nerazumijevanja koncepata računskih radnji i njihovih zakona, prikazana je u sljedećem primjeru:

$$\begin{array}{l} \quad\ \ \underline{372 \cdot 465} \\ \quad 1488 \\ \ \ 2232 \\ \underline{1860\quad} \\ 209808 \end{array}$$

Ovakvo rješenje zadatka posljedica je nerazumijevanja zakonitosti na kojima se temelji pisano računanje, u ovome slučaju distributivnosti množenja prema zbrajanju. Pisanim računanjem ovaj zadatak rastavljamo na sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} 372 \cdot (4 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 5) &= 372 \cdot (4 \cdot 100) + 372 \cdot (6 \cdot 10) + 372 \cdot 5 \\ &= (372 \cdot 4) \cdot 100 + (372 \cdot 6) \cdot 10 + 372 \cdot 5. \end{aligned}$$

Učenik koji riješi zadatak kao u primjeru (u kojemu je dobio rezultat 209808) ne razumije operiranje mjesnim vrijednostima te djelomične rezultate pogrješno potpisuje jedan ispod drugoga, pomičući svaki novi za jedno mjesto ulijevo, umjesto udesno. Kad rezultate ne bismo pomicali, već potpisivali znamenku ispod znamenke, počevši potpisivanjem znamenke jedinica jednog djelomičnog rezultata ispod znamenke jedinica drugog, to bi značilo da smo prvi faktor množili brojevima 4, 6, 5. Međutim, navedene znamenke predstavljaju mjesnu vrijednost dekadskih jedinica, stoga je svaki od djelomičnih rezultata potrebno pomnožiti višekratnikom odgovarajuće dekadske jedinice (kao što je to navedeno iznad). Budući da višekratnicima dekadskih jedinica lako množimo dopisivanjem nula s desne strane, potrebno je voditi računa o mjestu predviđenom za te nule. Stoga je, ako množenje počinjemo znamenkom 4 te dalje nastavljamo redom, potrebno svaki sljedeći rezultat pomaknuti za jedno mjesto udesno (jer svaki put množimo deset puta manjim višekratnikom dekadske jedinice, stoga nam je svaki put potrebno jedno mjesto manje za nulu koju trebamo dopisati dobivenom djelomičnom rezultatu). Množenje možemo početi od bilo koje mjesne vrijednosti faktora, ali moramo paziti na pravilno potpisivanje preostalih djelomičnih rezultata. Sljedeća pogrješka pokazuje rješenje učenika koji je upamtio da se rezultati pomiču udesno, ali je to primijenio pogrješno, budući da je počeo množiti od jedinica:

$372 \cdot 465$
1860
2232
1488
209808

Evo nekoliko primjera kako se moglo izvesti ispravno pisano računanje:

$372 \cdot 465$
1488
2232
1860
172980

$372 \cdot 465$
1860
2232
1488
172980

$372 \cdot 465$
1860
1488
2232
172980

Sharma (2001) ističe da su strategije rješavanja zadatka važnije od samog rezultata. One nam pokazuju tijek učenikova mišljenja te nam pomažu otkloniti poteškoće koje se kod učenika pojavljuju. Pri obradi zakona računskih radnji valja na umu imati njihovu kasniju primjenu te oprezno pristupiti njihovom poučavanju. Također, treba voditi računa o implementiranju zakona računskih radnji u ostale matematičke sadržaje kako bi učenici postigli automatizaciju njihove primjene kad god ona predstavlja pomoć u rješavanju zadataka. Općenito, sve matematičke sadržaje treba nastojati povezivati, ne poučavati ih izdvojeno. Učenicima uvijek treba ponuditi kontekst u kojemu mogu samostalno primjenjivati matematičke principe.

8. ZAKLJUČAK

U nastavi matematike vrlo je važno da učitelj metodički dobro prezentira svojstva računskih operacija te omogući učenicima da samostalno otkriju zakone računskih radnji i potakne ih na njihovu primjenu. Ne samo da će na taj način učenici lakše doći do rješenja postavljenog problema, već će primjena ovih zakona ponekad biti jedini način da dođu do rješenja. Zakoni računskih radnji omogućuju nam da novi matematički problem rastavimo na one koji su nam otprije poznati te primijenimo već provjerene metode. Učitelj ima veliku ulogu i u ispravljanju neispravnih analogija koje su očekivane kod učenika tijekom usvajanja zakona računskih radnji. Učitelj zato treba osigurati kontekst za konceptualno razumijevanje zakona računskih radnji. Inzistiranje na točnosti riješenog zadatka, uvježbavanje tehnike računanja bez provjere razumijevanja koncepata vodi formalističkom znanju koje, pak, rezultira neuspjehom u nastavi matematike. Čak ni savršena metodička priprema ne osigurava učenikovu spontanu primjenu zakona računskih radnji. Ono čemu učitelj treba težiti jest implementiranje ovih sadržaja u ostale, kad god je to moguće.

U ovome su radu predložene aktivnosti za razvoj konceptualnog razumijevanja zakona računskih radnji. Budući da u udžbenicima i zbirkama prevladavaju zadatci zatvorenog tipa, usmjereni ka proceduralnom znanju, bilo bi zanimljivo usporediti rješenja zadataka iz priloga onih učenika s kojima učitelji rade isključivo sadržaje iz udžbenika i zbirki s onima učenika čiji učitelji uvijek osiguravaju dodatne sadržaje u obliku zadataka otvorenog tipa te zorno demonstriraju matematičke zakonitosti.

LITERATURA

1. Barnaki, S. (2013). *Repetitorij matematike osnovne škole.* Zagreb: Školska knjiga.
2. Baroody, A. J., Gannon, K. E. (1984), The development of the Commutativity Principle and Economical Addition Strategies. *Cognition and Instruction, 1:3,* 321–339.
3. Baroody, A. J., Wilkins, J. L. M., Tiilikainen, S. H. (2003). The development of children's understanding of additive commutativity: From protoquantitive concept to general concept? U *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructive Adaptive Expertise* (str. 127–160). Lawrence Erlbaum Associates.
4. Crnjac, M., Jukić, D., Scitovski, R. (1994). *Matematika*. Osijek: Ekonomski fakultet.
5. Ćurić, F., Markovac, J. (1984). *Matematika za treći razred osnovne škole. Priručnik za učitelje*. Zagreb: Školska knjiga.
6. Dell, D. (ur.). *The World Book of Math Power* (Vol. II.). Chicago: William H. Nault.
7. Dijanić, Ž., Debelec, T. (2015). Proceduralno i konceptualno znanje. *Matematika i škola, 17(82), 51–60.*
8. Dolaček-Alduk, Z., Lončar-Vicković, S. (2009). *Ishodi učenja-priručnik za sveučilišne nastavnike*, Osijek: Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera.
9. Duda, Gligor. (1964) *Početna nastava matematike*, Zagreb: Školska knjiga.
10. Đurović, I., Đurović, J. (1983*). Matematika za prvi razred osnovne škole. Priručnik za učitelje*. Zagreb: Školska knjiga.
11. Đurović, I., Đurović, J. (1987). *Matematika za drugi razred osnovne škole. Priručnik za učitelje*. Zagreb: Školska knjiga.
12. Glasnović Gracin, D. (2014). Modeli aritmetike za razrednu nastavu. *Puočak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 15(59), 12–29.
13. Godau, C., Haider, H., Hansen, S., Schubert, T., Frensch, P.A., Gaschler, R. (2014). *Spontaneously spotting and applying shortcuts in arithmetic- a primary school perspective on expertise*. Pribavljeno 1.9.2017. s https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4051128/
14. Hafstrom, J. E. (1961). *Basic Concepts in Modern Mathematics*, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.
15. Hansen, S. M., Haider, H., Eichler, A., Godau, C., Frensch, P. A., Gaschler, R. (2015). Fostering Formal Commutativity Knowledge with Approximate Arithmetic. *PloS ONE* 10(11). Pribavljeno 1.9.2017. s https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4051128

16. Koletić, M. (1967). Metodika nastave aritmetike. U P. Šimleša (ur.), *Metodika elementarne nastave materinskog jezika i matematike* (str. 122–199). Zagreb: Pedagoško-književni zbor.
17. Kurepa, S. (1984). *Uvod u matematiku*. Zagreb: Tehnička knjiga
18. Kurnik, Z. (2009). Indukcija. *Matematika i škola, I (5), 197–203.*
19. Marinović, M. (2013). *Kako oblikovati ishode učenja počevši od kraja*. Rijeka: Agencija za odgoj i obrazovanje.
20. Markovac, J. (1978). *Neuspjeh u nastavi matematike: od 1. do 4. razreda osnovne škole-uzroci i suzbijanje.* Zagreb: Školska knjiga.
21. Markovac, J., Benčić, V. (1972). *Matematika 1: priručnik za nastavnike. Zagreb:* Školska knjiga.
22. Markovac, J., Benčić, V. (1974). *Matematika za treći razred osnovne škole: priručnik za nastavnike.* Zagreb: Školska knjiga.
23. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa (2017). *Nacionalni kurikulum nastavnoga predmeta Matematika. Prijedlog nakon javne rasprave*. Pribavljeno 1.9.2017. s http://mzos.hr/datoteke/6-Predmetni_kurikulum-Matematika.pdf
24. Ministarstvo znanosti obrazovanja i športa (2011). *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje*. Zagreb: Ministarstvo znanosti obrazovanja i športa.
25. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa (2006). *Nastavni plan i program za osnovnu školu*. Zagreb: Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa.
26. Pavleković, M. (2008). *Metodika nastave matematike s informatikom 1* (3. izdanje). Zagreb: Element.
27. Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. U *G. Leinhardt, R. Putnam, R.A. Hattrup (ur.), Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, 275-323. Hillsdale: Erlbaum.
28. Rovan, D., Pavlin-Bernardić, N., Vlahović-Štetić, V. (2009). Imaju li medvjedići jednak broj bombona? Konceptualno razumijevanje osnovnih svojstava zbrajanja. *Suvremena psihologija, 12(1),* 99-118.
29. Sharma, M. C. (2001). *Matematika bez suza – kako pomoći djetetu s teškoćama u učenju matematike.* Buševec: Ostvarenje.
30. Vlahović-Štetić, V., Vizek Vidović, V. (1998). *Kladim se da možeš... – psihološki aspekti početnog poučavanja matematike.* Zagreb: Udruga roditelja Korak po korak.

PRILOZI

Prilog 1. Zadatci za vježbu: asocijativnost i komutativnost zbrajanja

1. U kružić upiši jedan od znakova $<, >, =$.

$12 + 6 \bigcirc 12 + 6$	$25 + 13 + 18 \bigcirc 25 + 18 + 13$
$3 + 5 \bigcirc 5 + 3$	$16 + (4 + 24) \bigcirc (16 + 24) + 4$
$7 + 4 \bigcirc 8 + 7$	$34 + 48 - 15 \bigcirc 48 + 34 - 15$
$13 + 6 \bigcirc 2 + 5$	$60 + 50 - 6 \bigcirc 60 + 6 - 50$
$9 + 6 \bigcirc 8 + 10$	$40 - (20 - 15) \bigcirc (40 - 20) - 15$

2. Ana je nacrtala trokut i njegove vrhove označila slovima A, B i C. Ovo su duljine stranica koje je izmjerila ravnalom: $|AB| = 5$ cm, $|BC| = 8$ cm i $|AC| = 6$ cm. Stranice Antonijevog trokuta imaju ove duljine: $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 5$ cm i $|AC| = 8$ cm. Čiji trokut ima veći opseg?

3. Na crtu upiši odgovarajući broj.

$34 + \_\_\_\_ = 78 + 34$

$22 + (31 + 38) = (22 + \_\_\_\_) + 38$

$43 - (\_\_\_\_ + 12) = 43 - (12 + 22)$

4. Napiši 5 brojeva koji bi mogli stajati u kvadratiću.

$34 + 29 + 19 < \square + 19 + 34$

Prilog 2. Zadatci za vježbu: asocijativnost i komutativnost množenja, distributivnost množenja prema zbrajanju

1. Usporedi:

   $(3+5+7)\cdot 8$ ◯ $3+5+7\cdot 8$

   $12\cdot 8+5\cdot 13$ ◯ $5\cdot 13+8\cdot 12$

   $17\cdot 24\cdot 5$ ◯ $4\cdot 17\cdot 5\cdot 6$

2. Izračunaj: $2+3+5$. Što će se dogoditi sa zbrojem ako svaki od pribrojnika uvećamo tri puta?

3. Jedan par paralelnih stranica kvadrata produljen je za 5 cm, a drugi je par produljen za 2 cm i tako je nastao pravokutnik čija je površina za 31 cm^2 veća od površine početnog kvadrata. Kolika je stranica tog kvadrata?

4. Izračunaj:

   $2+4+6+8+\cdots+100=$

5. Obitelj Florić uzgaja krizanteme, ruže i tulipane. Prošle su godine prodali cvijeće u ukupnoj vrijednosti 275000 kn. Cijena jednog tulipana je 8 kn, krizantema je jednu kunu skuplja od tulipana, a ruža je jednu kunu skuplja od krizanteme. Koliko su ukupno prodali svih cvjetova ako je tulipana prodano dvostruko više od krizantema, a ruža trostruko više od krizantema?

POPIS SLIKA, TABLICA I PRILOGA

Popis slika:

Popis tablica:

Popis priloga: