Rad s matematički nadarenim učenicima u početnoj nastavi matematike

Rašić, Andreja

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI

Andreja Rašić

RAD S MATEMATIČKI NADARENIM UČENICIMA U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

DIPLOMSKI RAD

Slavonski Brod, 2018.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni učiteljski studij

RAD S MATEMATIČKI NADARENIM UČENICIMA U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

DIPLOMSKI RAD

Predmet: Metodika matematike

Mentor: prof.dr.sc. Zdenka Kolar-Begović

Sumentor: izv.prof.dr.sc. Ružica Kolar-Šuper

Student: Andreja Rašić

Matični broj: 2716

Modul: A

Slavonski Brod

2018.

Zahvaljujem svojoj mentorici prof.dr.sc. Zdenki Kolar-Begović
na pruženoj pomoći i korisnim savjetima.
Zahvaljujem svojoj obitelji na podršci i strpljenju.

Sažetak

Tema ovog diplomskog rada jest rad s matematički nadarenim učenicima u početnoj nastavi matematike. Osnovna ideja i cilj ovog rada je prikazati teorijske postavke o darovitosti s naglaskom na matematiku, te utvrditi pripremljenost studenata Učiteljskoga fakulteta za rad s matematički darovitim učenicima.

Istraživanje je provedeno na Fakultetu za odgojne i obrazovne znanosti u Osijeku i dislociranom studiju u Slavonskom Brodu na uzorku od 64 studenta četvrte godine Učiteljskog studija. Ispitanici su rješavali zadatke s matematičkih natjecanja koristeći pritom metode primjerene radu s učenicima u početnoj nastavi matematike. Rezultati pokazuju da je većina studenata uspješna u rješavanju zadataka, a analiza pokazuje da studenti koriste različite strategije i metode rješavanja problemskih i logičkih zadataka.

Ključne riječi: darovitost, matematika, dodatna nastava, matematička natjecanja, metode.

Summary

The theme of this graduate thesis is to work with mathematically gifted students in elementary education. The basic idea and purpose of this paper is to present theoretical basis about talent with an emphasis on mathematics and to determine whether future teachers prepared to work with mathematically gifted students.

Research was conducted at the Faculty of Education in Osijek and dislocated study in Slavonski Brod on a sample of 64 students in the fourth year of study. Respondents were solving tasks from mathematical competitions using appropriate methods while working with student sin elementary education. The results show that students are successful in problem solving and analysis of their works show that students use a variety of strategies and methods in problem-solving and logical tasks.

Key words: talent, mathematics, additional classes, mathematical competitions, methods.

Sadržaj

1. UVOD

U ovom radu razmatrat ćemo rad s matematički darovitim učenicima. Daroviti učenici imaju visoko razvijene sposobnosti za postizanje vrhunskih rezultata u jednom ili više područja. Često se događa da učitelji nisu dovoljno posvećeni radu s darovitim učenicima. Takvo ponašanje proizlazi iz temeljne zablude o darovitim učenicima, a to je da su daroviti učenici dovoljno „pametni“ da uspiju i bez dodatnog (posebnog) rada s njima. To je upravo i čest razlog da su nadarena djeca često, na neki način, zanemarena.

Osim navedenog problema, u radu s matematički nadarenim učenicima javlja se još jedan - matematika je područje koje velikom broju ljudi, pa tako i nekim učiteljima, stvara teškoće i budi određeni strah. Bez obzira na svoje stavove prema matematici učitelj je uz roditelje jedna od ključnih osoba za razvoj djetetovih vještina stoga je dužan prekoračiti svoja ograničenja i pružiti učeniku adekvatno matematičko obrazovanje. Iz ovoga se naravno nameće pitanje koliko su zapravo učitelji pripremljeni za rad s matematički nadarenim učenicima.

Osim aktualnosti ove teme mislim da je važno istaknuti i osobnu motiviranost za pisanje rada na temu matematičke darovitosti. Tijekom svog školovanja uvijek sam pokazivala sklonost matematici. Od 1. do 8. razreda pohađala sam dodatnu nastavu matematike, a sudjelovala sam i na nekoliko matematičkih natjecanja. S dodatne nastave u sjećanju mi je ostalo repetitivno rješavanje zadataka s redoslijedom računskih operacija (koji je bio prvi na natjecanju) i pokušavanje rješavanja zadataka. Smatram da se uz drugačiji pristup i pridavanje veće pozornosti mojoj sklonosti prema matematici moglo doprinijeti mojoj većoj usmjerenosti tom području obrazovanja. Nismo svi jednaki, niti smo jednako sposobni u nekom području, ali smo svi jednako važni i zaslužujemo pristup koji će maksimalno razviti naše najjače strane.

2. DAROVITOST

Daroviti učenici su oni učenici koji pokazuju potencijal za izuzetnu uspješnost u mnogim različitim područjima djelovanja. (George, 2007:14)

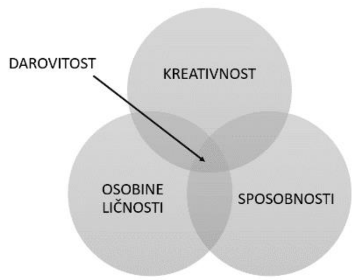
Osnovicu potencijalne darovitosti čini niz naslijeđenih dispozicija koje omogućuju natprosječnost. Prema tradicionalnom shvaćanju inteligencija je konstantna sposobnost pojedinca koja povećava njegova dostignuća u praktički svim područjima. (Pavleković, 2009:35)

Postoje brojne definicije darovitosti i svaka od njih razlikovat će se od autora do autora, ali većina suvremenih definicija će se složiti u jednome – darovitost se mora sagledati kao skup osobina koje pojedincu omogućuju dosljedno postizanje iznadprosječnih rezultata u jednom ili više područja kojim se bavi.

Pravilnik o osnovnoškolskom odgoju i obrazovanju darovitih učenika darovitost određuje kao *spoj triju skupina osobina: natprosječnih općih ili specifičnih sposobnosti, motivacije i visokog stupnja kreativnosti.* (NN broj 59/1990) Ova definicija proizlazi iz definicije nadarenosti Josepha S. Renzullija. On je, pokušavajući otkriti osnovu darovitosti i na koji način se ona iskazuje, razvio „troprstenastu" definiciju nadarenosti koja okuplja tri skupine osobina:

1. iznadprosječno razvijene sposobnosti;
2. osobine ličnosti, a posebno se ističe motivacija sa željom postizanja cilja;
3. kreativnost.

Kao što slika 1. pokazuje mjesto gdje se navedene skupine osobina preklapaju predstavlja darovitost u specifičnom području aktivnosti. Pojedini učenici će pokazivati darovitost dosljedno i u više područja dok će je drugi pokazati samo u pojedinim područjima interesa. (Elezović, 2007)



Slika 1. Troprstenasta definicija darovitosti

Vidljivo je da je darovitost širi pojam od iznadprosječnih intelektualnih sposobnosti. Ona obuhvaća način i kvalitetu mišljenja i pamćenja, kreativnost, umjetničke sposobnosti, tjelesnu spretnost i socijalnu prilagodljivost. (Cvetković Lay, Sekulić Majurec, 2008)

Prema Cvetković Lay i Sekulić Majurec jedan od onih koji su imali drukčiji pristup podjeli ljudskih intelektualnih sposobnosti je psiholog Howard Gardner. Njegova teorija o višestrukoj inteligenciji odražava osnovnu bit darovitosti, a to je da se ona može iskazati u različitim područjima. On je ljudske sposobnosti podijelio u sedam skupina i nazvao ih „sedam inteligencija“. To su:

- **verbalno-lingvistička inteligencija** - bogat rječnik, brza i laka manipulacija riječima, sposobnost pričanja bogate i cjelovite priče/događaja s brojnim detaljima;
- **logičko-matematička inteligencija** - sposobnost apstraktnog mišljenja i rješavanja problema, manipulacija apstraktnim pojmovima, količinama i brojevima;
- **vizualno-spacijalna inteligencija** - sposobnost snalaženja u prostoru, kreiranje i građenje objekata od kocaka i slično;
- **glazbeno-ritmička inteligencija** - smisao za ritam i glazbu, zapažanje najrazličitijih zvukova u okolini, sposobnost raspoznavanja ritma i dijelova melodije;
- **tjelesno-kinestetička inteligencija** - sposobnost izvođenja i usklađivanja pokreta tijela, okretnost, spretnost, manipuliranje raznim predmetima (loptom i sl.);
- **intrapersonalna inteligencija** - razumijevanje sebe i vlastitih potreba, ali i svojih sposobnosti, osobina i emocija;
- **interpersonalna inteligencija** – razumijevanje drugih, osjetljivost na njihove potrebe i osjećaje, vođe i organizatori u razredu.

Škole se uglavnom usredotoče oko logičko-matematičke i verbalno-lingvističke inteligencije te se većinom tradicionalnih i standardiziranih testova inteligencije mjere upravo te dvije vrste inteligencije.

Teorijska definicija ne pomaže mnogo učitelju koji individualno različitu darovitu djecu susreće svakodnevno. No, na samu spomen darovitih učenika odmah znamo o kojoj je djeci riječ. Pri izdvajanju darovitih učenika uvijek se koriste neke od ovih sintagmi: on *prije* većine, on uvijek *brže* od svih, ona *uspješnije* od svojih vršnjaka, ona *drukčije* od svih… Darovite učenike najlakše je primijetiti u usporedbi s vršnjacima i iz toga razloga su učitelji, a ne roditelji, najčešće zaslužni za njihovo rano otkrivanje. Učitelj promatra učenika u skupini vršnjaka i u provođenju različitih aktivnosti te je vrlo vjerojatno da će donijeti ispravnu procjenu po pitanju njegove darovitosti. Škole se ne trebaju usmjeravati isključivo na prosječne učenike i svim učenicima pripisivati jednaku razinu sposobnosti nego bi trebale raditi na prepoznavanju područja u kojima je učenik jak. (Cvetković Lay, Sekulić Majurec, 2008)

2.1. Razlika između darovitog i bistrog djeteta

Mnogo djece predškolske i rane školske dobi će pokazivati neke od osobina koje se pripisuju darovitoj djeci. Tu djecu možemo nazivati „bistrom djecom“, a uz povoljne nasljedne i odgojne faktore neka od njih će se razviti u darovitu djecu, a neka ne. Treba istaknuti kako će se te osobine kod darovite djece javljati češće i bit će izraženije. Tablica 1. prikazuje neke razlike između darovite i bistre djece kako bi se lakše prepoznala priroda jednih, tj. drugih. (Cvetković Lay, Sekulić Majurec, 2008)

Bistra djeca često ugađaju učiteljima pa brzo na njih skrećemo pozornost i lakše ih je poučavati. Za razliku od njih daroviti učenici znaju biti izuzetno samozatajni i teški jer se ne uklapaju uvijek u okvire i norme ponašanja. (George, 2003)

BISTRO DIJETE	**DAROVITO DIJETE**
Zna odgovore	Postavlja pitanja
Zainteresirano je	Znatiželjno je
Ima dobre ideje	Ima neobične ideje
Trudi se pa dobro prolazi na testovima	Zaigran je, a i dalje dobro prolazi na testovima
Odgovara na pitanja	Raspravlja do u detalje, razrađuje, usavršava
Vođa je skupine	Samosvojno je, često radi sam
Pažljivo sluša	Iskazuje osjećaje i stavove o onome što sluša
Lako uči	Već zna
Uživa u društvu vršnjaka	Preferira društvo starije djece i odraslih
Shvaća značenje	Samostalno izvodi zaključke
Osmišljava zadatke i uspješno ih izvršava	Pokreće projekte
Mirno prima zadatke i poslušno ih izvršava	Zadatke prima kritički
Točno kopira zadano	Kreira nova rješenja
Uživa u školi	Uživa u učenju

Prima informacije, upija ih	Manipulira informacijama
Dobro koristi naučeno	Traži nove mogućnosti primjene naučenoga
Dobro pamti	Dobro pretpostavlja
Voli izlaganje u dijelovima	U izlaganju teži kompleksnosti
Zadovoljno je sobom	Vrlo je samo kritično

Tablica 1. Razlika između bistrog i darovitog djeteta

2.2. Predrasude o darovitim učenicima

Postoji mnogo predrasuda o darovitim učenicima, a upravo one mogu biti uzrok zanemarivanja darovitih učenika. U nastavku ćemo navesti neke od najčešćih zabluda koje okolina ima o nadarenim učenicima.

Daroviti učenici toliko su pametni da se mogu brinuti sami o sebi.

U razredima je rad prilagođen većini, tj. prosječnom učeniku. Takvim radom darovitim učenicima se ne omogućuje iskazivanje sposobnosti, a oni gube interes i motivaciju za učenje. Daroviti učenici zahtijevaju pojačanu pozornost i dublje (šire) sadržaje od onih predviđenih za većinu učenika.

Daroviti učenici izvrsni su u svim predmetima.

Pogrešno se pretpostavlja kako daroviti učenici posjeduju visoko razvijene intelektualne sposobnosti zbog kojih su daroviti na širem području. Upravo suprotno, daroviti učenici mogu u jednom predmetu biti daroviti, a u drugome imati teškoće u učenju.

Djeca s teškoćama u razvoju moraju učiteljima biti prioritet.

Naravno da će darovita djeca lakše od djece s teškoćama u razvoju nadoknaditi nedostatke u svom obrazovanju, ali i darovitost traži ispunjenje specifičnih potreba. Darovitim učenicima, kao i onima s poteškoćama u razvoju, treba pristupiti u skladu s njihovim sposobnostima kako bi se njihov razvoj pravilno odvijao.

Svi su učenici talentirani u nečemu.

Svi učenici mogu učiti i pronaći će se u nekom području. Ali daroviti učenici uče brže od svojih vršnjaka i sposobni su naučiti više od njih. Mišljenje da su svi učenici daroviti u nečemu vodi nestanku posebnog obrazovanja za darovite.

Nadareni učenici sličnog su ponašanja.

Baš kao svi tako i daroviti učenici imaju različite temperamente, a katkad iskazuju neuobičajeno i neprilagođeno ponašanje. Nepoželjno ponašanje može biti rezultat nezadovoljenja specifične potrebe darovitog djeteta. Kako ne postoji jednoznačan opis ponašanja za svu djecu tako ni ponašanje darovitih ne možemo jednoznačno odrediti.

Darovita djeca su „proizvod“ angažiranih roditelja.

Roditelji ne stvaraju darovitost, štoviše preambiciozni roditelji mogu utjecati na to da dijete izgubi svaki interes za postignućem. Roditeljima se predlaže da dopuste djeci normalno djetinjstvo bez prevelikih očekivanja.

Programi za darovite su „elitni“ i zbog njih se ostala djeca osjećaju loše.

Darovita djeca nisu elita nego djeca s posebnim potrebama. Iz toga razloga programe osmišljene za njih treba tretirati kao bilo koji drugi program za djecu s posebnim potrebama. Za razvoj društva važno je prikladno obrazovanje darovite djece. (Winner, 1996)

3. MATEMATIČKA DAROVITOST

Učenici nadareni za matematiku ne moraju nužno biti matematičari, ali neadekvatno matematičko obrazovanje onemogućuje profesionalno napredovanje i u drugim područjima. (Elezović, 2007.) Neke osobine koje posjeduju učenici nadareni za matematiku i po njima se razlikuju od svojih vršnjaka su: lakoća i brzina generaliziranja gradiva, shvaćanje i povezivanje problema, preskakanje međukoraka u rješavanju i argumentiranju, mijenjanje načina razmišljanja te zapamćivanje odnosa i načela u rješenju problema. (George, 2003)

Holton i Gaffney (1994); Miller (1990) navode sljedeća obilježja rane nadarenosti za matematiku:

- neuobičajeno zanimanje za brojeve;
- sposobnost razumijevanja i brze primjene novih ideja;
- sposobnost uočavanja obrazaca i apstraktnog razmišljanja;
- korištenje različitih nestandardnih postupaka;
- sposobnost prenošenja matematičkih postupaka u neuobičajene situacije;
- korištenje analitičkih, deduktivnih i induktivnih metoda zaključivanja;
- upornost u rješavanju teških i složenih problema.

Prema Elezović (2007) daroviti se učenici razlikuju od ostalih učenika u trima osobinama koje su osobito važne za matematiku, a to su: brzina kojom uče (važna kod povezivanja matematičkih sadržaja), dubina njihovog razumijevanja (razlikovanje po novom obilježju) i njihov interes za predmet (mora se na vrijeme uočiti).

Pokazalo se da učenici koji pokazuju matematičku nadarenost usvajaju pojmove i tehnike predviđene za stariji uzrast. Učitelj treba težiti ulaženju u dubinu pojedinih pojmova, a ne prelaziti na nove sadržaje, posebno ako oni predstoje u budućem redovnom obrazovanju. Od darovitog učenika očekuje se veća dubina razumijevanja i veća sposobnost interpretacije dobivenih rezultata.

U nastavku se navodi očekivani napredak darovitog učenika pri tome je izdvojen samo očekivani napredak za učenike primarnog obrazovanja. Daroviti učenik bit će sposoban:

do kraja drugog razreda:

- čitati, pisati i razumjeti cijele brojeve i mjesne vrijednosti znamenki do milijun;
- zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti cijele brojeve do tisuću;
- zbrajati i oduzimati razlomke jednakih nazivnika;
- rješavati riječima zadane probleme koji koriste osnovne operacije s cijelim brojevima;
- koristiti matematički jezik da bi prenio zaključke izvedene analizom;
- identificirati i klasificirati obilježja geometrijskih likova;

do kraja trećeg razreda:

- čitati, pisati i razumjeti brojeve do milijarde;
- zbrajati, oduzimati i množiti brojeve do milijun;
- zbrajati, oduzimati i dijeliti razlomke nejednakih nazivnika;
- uspostaviti vezu između razlomaka i decimalnog zapisa;
- rješavati riječima zadane probleme koji uključuju operacije s cijelim brojevima i razlomke;
- procijeniti rješenje problema koji zahtijevaju osjećaj za brojeve;
- usporediti obilježja geometrijskih likova;
- primijeniti rješavanje problema u situacije iz svakodnevnog života;
- očitavati dijagrame, tablice i grafove;
- primijeniti formule na kvadrat, pravokutnik, trokut i krug;

do kraja četvrtog razreda:

- vršiti operacije s cijelim i decimalnim brojevima i razlomcima
- zapisati, interpretirati i rješavati probleme zadane riječima koji uključuju temeljne operacije s cijelim i decimalnim brojevima i razlomcima
- prepoznati, poredati, zaokružiti i usporediti cijele i decimalne brojeve i razlomke
- izračunati duljinu, površinu i obujam geometrijskih likova
- primjenjivati metrički sustav u problemima iz svakodnevnog života
- očitavati i načiniti dijagrame, tablice i grafove
- preračunavati decimalne brojeve i razlomke u postotke. (Elezović, 2007)

3.1. Prepoznavanje matematički nadarene djece

Manje je pogrešno uvrstiti u grupu darovitih i neko nedarovito dijete, nego neko darovito dijete proglasiti nedarovitim i ne osigurati mu poticaje za razvoj njegove darovitosti. (Cvetković Lay, Sekulić Majurec, 2008:31)

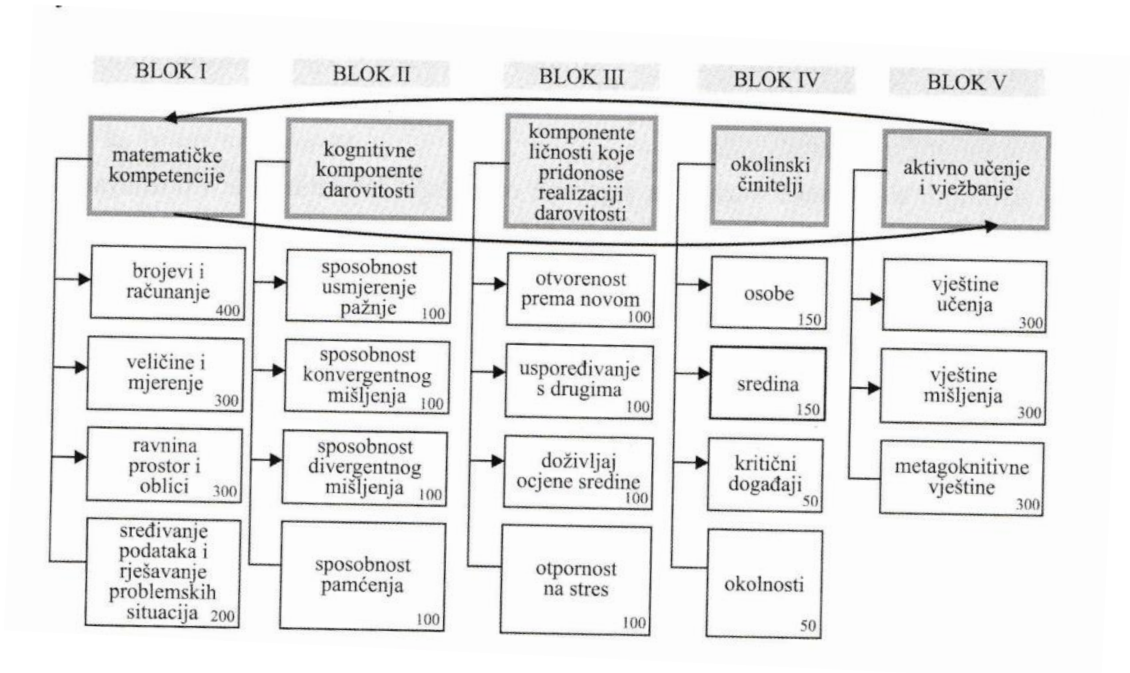
Ponekad je lako uočiti i prepoznati darovito dijete, no evo što bismo konkretno mogli vidjeti kada je riječ o matematici:

- *rano razumijevanje brojnosti:* dijete niže predmete i ne dozvoljava da netko uzme predmet iz niza, a ako iskoristi sve kockice traži još; spontano govori koliko čega ima bez da je prije toga brojilo;
- *rani interes za brojeve*: dijete rado pokazuje odraslima brojeve u svakodnevnom životu i provjerava s njima simbole brojeva i količine;
- *rano razumijevanje igara s pravilima (Mlin, Čovječe ne ljuti se, Domino…);*
- *rano snalaženje na mobitelu i računalu*: djeca u igrama pronalaze opcije za koje odrasli nisu znali, roditeljima daju upute što trebaju raditi;
- *ispitivanje razlika među odnosima (prostornim i među predmetima) – klizanje, provlačenje, mjerenje*: može se uočiti kroz kretanje u igri ili kroz igre građenja (slaganje kockica);
- *korištenje i razumijevanje funkcija na kalkulatoru;*
- *igre brojevima u glavi*: tijekom aktivnosti svakodnevnog života dijete spontano uočava koliko čega ima;
- *rješavanje i sastavljanje labirinta i matematičkih problema*: traže od odraslih da im zadaju matematičke zadatke, a često i sami izrađuju radne listove i rebuse;
- *spontano brojenje tijekom slušanja i kretanja;*
- *brzo učenje odnosa i računskih operacija*: spontano računanje, primjerice za novčanicu od 20 kuna spontano kažu da su to dvije novčanice od 10 kuna. (Kubelka i suradnici, 2013)

U potrazi za matematički nadarenom djecom u ranoj školskoj dobi učitelj treba usmjeriti pažnju i na učenike koji znaju iznenaditi originalnim rješenjima, imaju izvrsnu procjenu i sposobnost uočavanja uzročno-posljedičnih veza. Učenicima s vremena na vrijeme treba ponuditi mogućnost rješavanja zadataka sadržaja *koje još nisu učili*, ali bi ih mogli riješiti jer posjeduju potrebna znanja samo ih trebaju poopćiti na višu razinu.

Primjer. Učeniku četvrtog razreda zadamo da pomnoži 375 sa 23 kada to još nije obrađeno na nastavi. Nekoliko učenika će zadatak riješiti tako da broj 375 potpiše jedan ispod drugog i izračunaju zbroj od 23 takva pribrojnika. Dio učenika će se sjetit da je $375 \cdot 10 = 3750$, a $375 \cdot 3 = 1125$, iz toga je $375 \cdot 23$ jednako što i $3750+3750+1125=8625$. Sposobnost pronalaženja rješenja unatoč preprekama je ono što izdvaja nadarenog učenika od ostalih vršnjaka. (Pavleković, 2009.)

Prepoznavanje darovitih učenika može biti zahtjevan i složen posao, posebno ako se učitelj ne smatra kompetentnim za to. Postoje različiti ekspertni sustavi za identifikaciju darovitih učenika, a jedan takav opisuje Pavleković (2009). Ti sustavi, pa tako i ovaj – *Mat-dar,* prikupljaju i obrađuju informacije o učeničkim kompetencijama, osobinama ličnosti, okolinskim faktorima i metodama učenja te učenike svrstava u jednu od četiri kategorije: *potencijalno daroviti učenik, učenik s iznadprosječnim matematičkim sposobnostima, učenik prosječnih matematičkih sposobnosti i učenik s nedovoljno razvijenim sposobnostima za matematiku.* Slika 2. prikazuje komponente darovitosti uključene u bazu znanja ekspertnog sustava *Mat-dar*. (Pavleković, 2009) Iz toga možemo vidjeti što će sve utjecati na iskazivanje i prepoznavanje darovitosti.



Slika 2. Komponente darovitosti za matematiku (Pavleković, 2009:47)

3.2. Uloga učitelja

Postavlja se pitanje kakvog učitelja trebaju matematički daroviti učenici. Njegova je uloga u obrazovanju darovitih od iznimne važnosti. Ukoliko kod učitelja postoje bilo kakve osobne predrasude prema matematici ili nedostaci u poznavanju matematičkih sadržaja oni ne smiju biti prepreka u radu s darovitima. Savršen učitelj ne postoji stoga je najvažnije da svaki učitelj bude spreman za nova učenja i usavršavanja.

Učitelj treba prvenstveno prepoznati učenikovu darovitost. Kako bi u tome bio uspješan potrebna mu je obuka i podrška. Trebao bi dobro poznavati matematičke sadržaje, a ukoliko ne posjeduje potrebna znanja treba potražiti pomoć i prevladati taj problem. Učitelj treba učenicima pokazati različite strategije rješavanja zadataka, ali isto tako poštovati njihove ideje i ohrabrivati ih na iznošenje istih. (Cvetković Lay, Sekulić Majurec, 2008)

Mišurac-Zorica i Rožić (2015) prema Arslanagić (2005) ističu neke važne osobine koje treba posjedovati učitelj matematički darovitih učenika:

- entuzijazam za poučavanje matematike;
- sposobnost da motivira i sluša učenike i uči od njih;
- sposobnost da učenje učini zabavnim;
- sposobnost razumijevanja učenikovih socijalnih, emocionalnih i obrazovnih potreba;
- razumijevanje načina razmišljanja, učenja i učenikove matematičke osobnosti;
- sigurnost u svoje sposobnosti toliko da se ne plaši rada s darovitim učenicima.

U radu s darovitim učenicima učitelj treba biti mentor, poticati samostalni rad i usmjeravati ga u rješavanju zadataka. Matematika je disciplina koja se lako povezuje sa svakodnevnim životom i to treba iskoristiti. Preporučuje se upotrebljavati matematičke igre, tekstualne probleme, logičke zadatke, zadatke koji se rješavaju iz više koraka i slično.

Zadaci primjereni za rad s darovitim učenicima nalaze se u okviru sljedećih tema:

- domišljato računanje i induktivno zaključivanje
- veličine i mjerenje
- ravnina, prostor i oblici
- usvajanje matematičkih koncepata mjerenjem
- sređivanje i obrada podataka. (Pavleković, 2009:69)

3.3. Dodatna nastava

Redovna nastava matematike ne može ispuniti zahtjeve koje imaju daroviti učenici zbog toga je nužno za te učenike organizirati dodatnu nastavu. Prema Pravilniku o tjednim radnim obavezama učitelja i stručnih suradnika u osnovnoj školi (NN broj 34/2014) dodatna nastava definira se kao poseban oblik nastave namijenjen darovitim učenicima koji pokazuju iznadprosječne rezultate u nekom području ili povećan interes za određeno područje. Dodatna nastava omogućuje učeniku da razvija svoju darovitost i ispunjava želju za dodatnim bavljenjem određenim područjem.

Dodatna nastava uglavnom se održava jedan sat tjedno, a grupu čini maksimalno 8, odnosno 10 učenika. U dodatnu nastavu uključuju se daroviti učenici, ali i svi oni koji su zainteresirani za nju i pri tome ne treba isključivo gledati na njihovu ocjenu. Ministarstvo ne propisuje program za dodatnu nastavu i taj se rad ne ocjenjuje.

Mišurac-Zorica i Rožić (2015) navode da je cilj dodatne nastave matematike motiviranje učenika, razvoj matematičkog mišljenja, uporaba matematike u svakodnevnom životu te popularizacija matematike. Na dodatnoj nastavi učitelj se treba odmaknuti od sadržaja i metoda koje primjenjuje u redovnoj nastavi te poticati učenike na otvorenu komunikaciju.

4. MATEMATIČKA NATJECANJA

Kako bi postigao uspjeh na natjecanju iz matematike učenik treba posjedovati velik broj ranije navedenih osobina darovitih učenika. No, matematička se natjecanja ne smiju koristiti kao kriterij za određivanje darovitosti. Na njima uspijevaju oni pojedinci koji su više uvježbani za rješavanje problema, imaju sposobnost brzog reagiranja i razmišljanja. Sudjelovanje učenika na natjecanju iz matematike donosi im višestruku korist. Omogućuje im se kompeticija i ostvaruje prirodna želja za provjerom matematičkih sposobnosti u odnosu na vršnjake. Sudjelovanje na natjecanju potiče učenike na dodatni rad u okviru njihovih mogućnosti. Taj dodatni rad povećava učenikove potencijale i cilj mu je da svaki učenik postigne maksimum svojih mogućnosti. Osim pozitivnih strana postoje i negativne posljedice sudjelovanja na natjecanju. Daroviti učenik će stvoriti pogrešnu sliku o sebi ukoliko doživi neuspjeh na natjecanju, a može izgubiti želju za daljnjim dodatnim radom ili čak interes za matematiku.

U cijeloj priči, priprema za natjecanje je važnija od samog natjecanja jer je ona nadopuna osnovnom obrazovanju. Učitelj je taj koji mora preuzeti aktivnu ulogu u pripremanju učenika za natjecanje jer samo pripremljeni učenici mogu postići dobre rezultate. Očekuje se da učitelj upozna učenike s različitim prikladnim metodama rješavanja problemskih zadataka. (Elezović, 2007)

4.1. Sustav natjecanja u Republici Hrvatskoj

U Hrvatskoj se natjecanja organiziraju od 1959./60. godine. Od tada se povećavao broj stupnjeva natjecanja, povećao se broj učenika koji sudjeluju i spustila se dobna granica. Od 1992. u matematička natjecanja uključeni su i učenici četvrtih razreda osnovne škole.

Za provedbu natjecanja u Republici Hrvatskoj zaduženo je Ministarstvo znanosti i obrazovanja RH, Agencija za odgoj i obrazovanje te Hrvatsko matematičko društvo. Sastavljanje zadataka posao je Povjerenstva za organizaciju i provedbu matematičkih natjecanja koje imenuje ministar MZOŠ.

Sustav natjecanja uključuje sljedeća natjecanja:

- školska (nisu obavezna);
- općinska ili gradska;

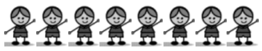
- županijska;
- državno natjecanje.

Natjecanja četvrtih razreda obuhvaćaju sljedeće sadržaje:

- školsko natjecanje
  - gradivo prethodnih razreda;
  - prirodni brojevi i kut;
- županijsko natjecanje
  - gradivo 4. razreda;
  - skupovi točaka u ravnini;
  - logički i kombinatorni zadaci.

U nastavku ćemo prikazati nekoliko zadataka sa školskih i županijskog natjecanja za 4. razred.

Zadatak 1. (školsko natjecanje, 2018., 4. razred OŠ).

Broj stanovnika u Republici Hrvatskoj u dobi od 10 do 14 godina prikazan je sličicom (piktogramom):  , gdje  predstavlja 30 000 osoba. Ako je broj djevojčica za 6500 veći od broja dječaka, koliko u Republici Hrvatskoj ima dječaka u dobi od 10 do 14 godina?

Zadatak 2. (školsko natjecanje, 2017., 4. razred OŠ)

Ivan skuplja kovanice od 2 kune i od 5 kuna. Skupio je 39 kovanica i sada ima 144 kune. Koliko ima kovanica od 2 kune, a koliko od 5 kuna?

Zadatak 3. (školsko natjecanje, 2015., 4. razred OŠ)

Zamislio sam jedan dvoznamenkasti broj. Zamijenio sam mu znamenke i dodao broj 15. Dobiveni broj sam prepolovio te onda zamijenio znamenke. Tako sam dobio broj 62. Koji sam broj zamislio?

Zadatak 4. (školsko natjecanje, 2009., 4. razred OŠ)

Nacrtaj dva usporedna pravca a i b. Na pravcu a odaberi točke A i B, a na pravcu b točke C, D i E. Napiši sve dužine kojima su krajnje točke u odabranim točkama.

Zadatak 5. (županijsko natjecanje, 2012., 4. razred OŠ)

Opseg trokuta, kojemu je stranica b za 1 cm dulja od stranice a, a stranica c za 1 cm dulja od stranice b, je 156 cm. Koliki je opseg kvadrata kojemu je duljina stranice jednaka duljini stranice b zadanog trokuta?

4.2. Klokan bez granica

Udruga *Klokani bez granica* međunarodnog je karaktera i okuplja veliki broj europskih zemalja. Udruga djeluje s ciljem populariziranja matematike, a glavna joj je zadaća organizacija natjecanja *Klokan bez granica.* Natjecanjem žele potaknuti učenike da se bave matematikom i izvan redovnih obrazovnih programa. Natjecanje se samofinancira članarinom svih sudionika, a organizira se u ožujku, istog dana u isto vrijeme u svim zemljama sudionicama.

Sudionici natjecanja podijeljeni su u 7 kategorija:

- *Pčelice* (II. razred)*;*
- *Leptirić* (III. razred)*;*
- *Ecoliers* (IV. i V. razred)*;*
- *Benjamins* (VI. i VII. razred);
- *Cadets* (VIII. razred)*;*
- *Juniors* (I. i II. razred srednje škole)*;*
- *Students* (III. i IV. razred srednje škole.

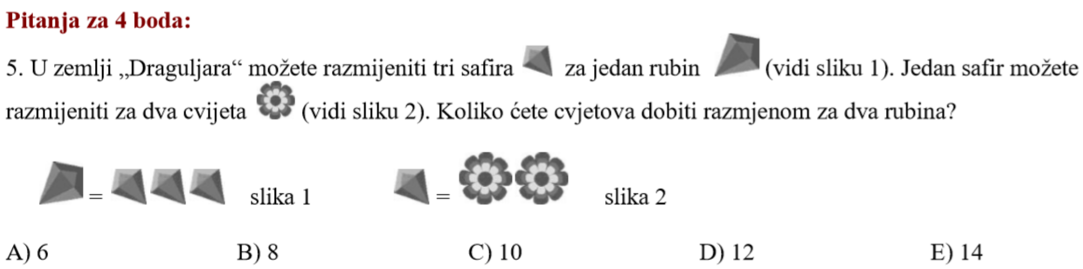
Propozicije za skupine Pčelice i Leptirići:

- 12 zadataka (prva četiri nose 3 boda, druga četiri 4 boda, posljednja četiri 5 bodova)
- vrijeme pisanja: 60 minuta
- zabranjeni kalkulatori
- ako je zaokruženi odgovor netočan, oduzima se četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak
- kako bi se izbjegli negativni bodovi svaki sudionik na početku dobiva 12 bodova
- mogući broj bodova 60

Propozicije za skupine Ecoliers, Benjamins, Cadets, Junior i Students:

- 24 zadatka (prvih osam nosi 3 boda, drugih osam 4 boda, a posljednjih osam 5 bodova)
- vrijeme pisanja: 75 minuta
- zabranjeni kalkulatori
- u svakom pitanju ponuđeno pet odgovora
- ako nije zaokružen nijedan odgovor, zadatak donosi 0 bodova
- ako je zaokruženi odgovor netočan, oduzima se četvrtina bodova predviđenih za taj zadataka
- kako bi se izbjegli negativni bodovi na početku svaki sudionik dobiva 24 boda
- mogući broj bodova 120.

U nastavku je prikazano nekoliko primjera zadataka s natjecanja *Klokan bez granica* za učenike razredne nastave. (Slika 3., slika 4., slika 5.)



Pitanja za 4 boda:

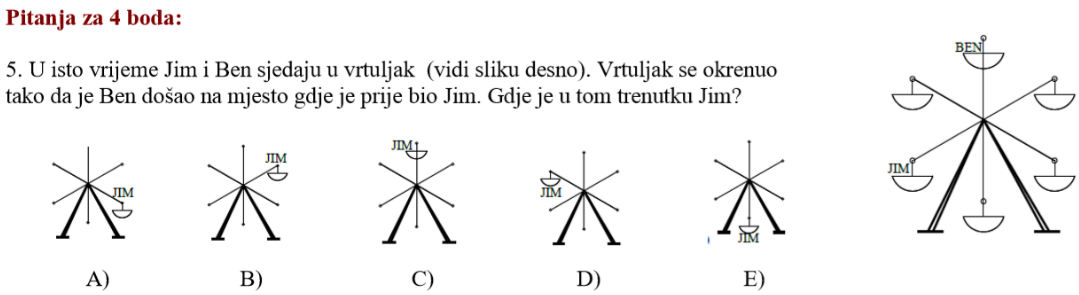
5. U zemlji „Draguljara“ možete razmijeniti tri safira za jedan rubin (vidi sliku 1). Jedan safir možete razmijeniti za dva cvijeta (vidi sliku 2). Koliko ćete cvjetova dobiti razmjenom za dva rubina?

= slika 1 = slika 2

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

Slika 3. Zadatak s natjecanja 2017. godine za skupinu *Pčelice*

(pribavljeno 11.4.2018., sa http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan/pcelice-2017-zad.pdf.)



Pitanja za 4 boda:

5. U isto vrijeme Jim i Ben sjedaju u vrtuljak (vidi sliku desno). Vrtuljak se okrenuo tako da je Ben došao na mjesto gdje je prije bio Jim. Gdje je u tom trenutku Jim?

Slika 4. Zadatak s natjecanja 2017. godine za skupinu *Leptirići*

(pribavljeno 11.4.2018., sa www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan/leptirici-2017-zad.pdf)

Pitanja za 4 boda:

9. Ana ima 5 stolaca zelene boje, 5 žute i 5 plave boje. Slaže ih oko okruglog stola: zeleni, žuti, plavi i dalje istim redoslijedom. Nakon što ih je postavila, želi postaviti pomoćni stolić koji treba biti pored zelenog stolca i nikako pored plavog. Na koliko mjesta oko stola može postaviti pomoćni stolić?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Slika 5. Zadatak s natjecanja 2017. godine za skupinu *Ecoliers*

(pribavljeno 11.4.2018., sa http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan/ecolier-2017-zad.pdf)

5. METODE RJEŠAVANJA PROBLEMSKIH ZADATAKA

Kada se susretnu s problemskim zadatkom učenici će ih uglavnom pokušati riješiti putem jednadžbi. No kako se takvi zadaci javljaju prije savladavanja jednadžbi učenicima razredne nastave potrebno je upoznati učenike sa specifičnim metodama rješavanja problemskih zadataka. U nastavku ćemo razmotriti neke od tih metoda.

5.1.Grafičko aritmetička metoda

Grafičko aritmetička metoda pogodna je za rješavanje tekstualnih zadataka u razrednoj nastavi. Učenici rješavaju zadatak uz pomoć crteža (sličice), a to im je zanimljivije od uobičajenog pristupa zadacima. Ovom metodom razvija se način zaključivanja i analiziranja sličan onome koji se razvija rješavanjem jednadžbi.

Zadatak 6.

Zbroj tri broja iznosi 3946. Prvi je pribrojnik 4 puta manji od drugoga, a treći za 4 veći od drugoga. Odredi te pribrojnike. (općinsko natjecanje, 1997., 4.razred OŠ)

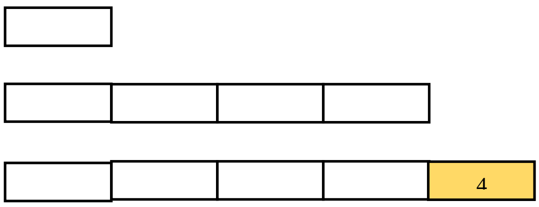
Rješenje

Iz zadatka možemo iščitati da je od tri pribrojnika najmanji treći, njega označimo sa 

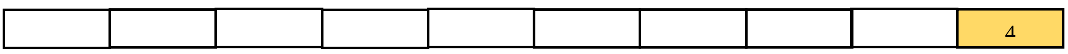
Drugi pribrojnik je 4 puta veći od njega pa njega grafički prikažemo kao red koji se sastoji od četiri pravokutnika sukladna onome kojim smo značili prvi pribrojnik. I treći pribrojnik je za četiri veći od drugoga pa njega grafički prikažemo kao drugi plus još jedan pravokutnik koji odgovara broju 4.

To bi izgledalo ovako:

1. pribrojnik
2. pribrojnik
3. pribrojnik



Zbroj sva tri pribrojnika je 3946. Grafički je prikazan kao 9 jednakih pravokutnika i pravokutnik koji odgovara broju 4.



= 3946

Iz toga slijedi da 9 pravokutnika predstavlja broj 3946 – 4 = 3942, tj. svaki pravokutnik predstavlja broj 3942 : 9 = 438. I sada možemo odrediti sva tri pribrojnika. Prvi pribrojnik je 438, drugi $4 \cdot 438 = 1752$, a treći 1752 + 4 = 1756.

5.2. Metoda rješavanja unatrag

Osnovna karakteristika ove metode je suprotan redoslijed, kreće se od posljednjeg podatka danog u zadatku i korak po korak dolazi na početak. Dakle, kreće se od zadnjeg danog podatka pa se operacije izvode obrnutim redoslijedom od onoga koji se u zadatku navodi.

Zadatak 7.

Majka je prije odlaska na posao pripremila košaricu šljiva za svoje tri kćeri. Prva se probudila najstarija kći koja je pojela trećinu šljiva iz košarice. Druga se probudila srednja kći i, misleći da se probudila prva, pojela trećinu šljiva iz košarice. Zadnja se probudila najmlađa kći i, smatrajući da se probudila prva, uzela je iz košarice trećinu šljiva. Tada je u košarici preostalo 8 šljiva. Koliko je šljiva majka ostavila u košarici?

Rješenje

Zadatak rješavamo tako da krenemo od posljednjeg podatka. Najmlađa kći je uzela iz košarice trećinu šljiva i nakon toga je u košarici ostalo 8 šljiva. To znači da je 8 šljiva jednako dvije trećine šljiva koje su bile u košarici prije nego je najmlađa kći uzela svoj dio. Iz toga izračunamo da je trećina jednaka 4, odnosno da je u košarici bilo $3 \cdot 4 = 12$ šljiva prije nego je najmlađa uzela svoj dio.

Nakon toga slijedi sljedeći korak. Srednja kći je pojela trećinu šljiva iz košarice i nakon toga ih je u košarici ostalo 12. To znači da je 12 šljiva jednako dvije trećine šljiva koje su bile u košarici prije nego je srednja uzela svoj dio. Iz toga izračunamo da je trećina jednaka 6, odnosno u košarici je bilo $3 \cdot 6 = 18$ šljiva prije nego je srednja uzela svoj dio.

Na isti način pristupimo i prvom koraku. Prva kći je uzela trećinu šljiva nakon čega ih je u košarici ostalo 18. 18 je dvije trećine šljiva koje su bile u košarici prije nego je prva uzela svoj dio. Iz toga slijedi da je jedna trećina jednaka 9, odnosno u košarici je bilo $3 \cdot 9 = 27$ šljiva.

Majka je u košarici ostavila 27 šljiva.

5.3. Metoda uzastopnog približavanja

Metoda uzastopnog približavanja naziva se i metoda pokušaja i pogrešaka. U nizu pokušaja dolazi se do rješenja postavljenog problema. U svakom pokušaju ispravlja se pogreška napravljena u prethodnom. Na taj način se pogreška smanjuje i svakim pokušajem smo bliže traženom rezultatu. I kod ove metode koristimo tablicu za sustavno prikazivanje pokušaja.

Zadatak 8.

Od početka školske godine, do danas, Zvonimir je dobio 46 ocjena. Svaka od njih je ili petica ili četvorka. Zbroj svih ocjena je 204. Koliko je Zvonimir dobio petica? (županijsko natjecanje, 2005., 4. razred OŠ)

Rješenje

Za rješavanje ovog zadatka izrađujemo tablicu. U prvi stupac upisujemo broj petica, u drugi broj četvorki. U ostalim stupcima računamo zbroj ocjena. Počinjemo tako da pretpostavimo da su sve ocjene bile petice, a zatim da su sve ocjene bile četvorke. Nakon toga pretpostavimo da je bilo pola petica, a pola četvorki. Nakon toga vidimo broj kojih ocjena moramo smanjivati odnosno povećavati. (Tablica 2.)

Broj petica	Broj četvorki	Zbroj petica	Zbroj četvorki	Ukupan zbroj ocjena
46	0	230	0	230
0	46	0	184	184
23	23	115	92	207
22	24	110	96	206
21	25	105	100	205
20	26	100	104	204
19	27	95	108	203

Tablica 2. Broj ocjena

5.4. Metoda ispisivanja sustavnih listi

Za rješavanje bilo kojeg zadataka važna je sustavnost i organiziranost, a za ovu metodu to je ključno. Ispisivanjem sustavnih listi mogu se rješavati brojevni zadaci gdje je primjerice potrebno ispisati sve brojeve s određenim znamenkama ili zadaci vizualnog tipa gdje je potrebno prebrojati sve trokute i slično. Liste se mogu zapisivati uz pomoć tablica ili na uobičajen način.

Zadatak 9.

Napiši sve dvoznamenkaste brojeve koji se mogu napisati koristeći znamenke 3, 4 i 9. Koliko ima tih brojeva? (školsko natjecanje, 2016., 4. razred OŠ)

Rješenje

Sustavnim ispisivanjem (tako da ispišemo prvo sve brojeve kojima je prva znamenka tri, zatim sve brojeve kojima je prva znamenka četiri i na kraju sve brojeve kojima je prva znamenka devet) dobit ćemo konačan broj dvoznamenkastih brojeva:

33	44	99	
34	43	93	
39	49	94	Takvih brojeva ima 9.

5.5. Metoda lažne postavke

U metodi lažne postavke pretpostavljamo da je neki po volji odabrani broj rješenje postavljenog problema. Provodeći tim brojem računske operacije dane u zadatku doći ćemo do saznanja koliko je puta odabrani (pretpostavljeni) broj veći ili manji od rješenja zadatka. Na osnovu tog odnosa ispravljamo pretpostavku i dolazimo do rješenja zadatka.

Zadatak 10.

Tri su prirodna broja dana tako da je svaki sljedeći tri puta veći od prethodnoga. Koji su to brojevi ako je njihov zbroj 546?

Rješenje

Pretpostavimo da su to brojevi 2, 6 i 18. Ti brojevi zadovoljavaju uvjet da je svaki sljedeći tri puta veći od prethodnog. Zbroj tih brojeva je $2 + 6 + 18 = 26$ i to je $546 : 26 = 21$ puta manji broj od zbroja danog u zadatku. Iz toga slijedi da su pretpostavljeni brojevi 21 puta manji od traženih. Dakle, rješenje ovog zadatka je sljedeće: prvi prirodni broj je $2 \cdot 21 = 42$, drugi pribrojnik je $6 \cdot 21 = 126$ i treći je $18 \cdot 21 = 378$.

Za provjeru rješenja zbrojimo tri prirodna broja: $42 + 126 + 378 = 546$.

5.6. Metoda promjene fokusa

Osnovna karakteristika metode promjene fokusa je uočavanje onih elemenata koji nisu odmah vidljivi u postavljenom zadatku. Ti elementi nam omogućuju rješavanje zadatka. Korištenje ove metode je jednostavnije jer može bit kraće, zahtijeva manje složene operacije, smanjuje opseg računanja i broj slučajeva za razmatranje.

Zadatak 11.

Jedno selo ima 5800 stanovnika i prosječno se taj broj godišnje smanji za 90 dok drugo selo ima 4000 stanovnika i njihov se broj godišnje poveća prosječno za 60. Nakon koliko će godina broj stanovnika u oba sela biti jednak?

Rješenje

Rješenje zadatka pronaći ćemo ako se fokusiramo na ukupnu promjenu broja stanovnika u oba sela godišnje.

- promjena broja stanovnika prvog sela -90
- promjena broja stanovnika drugog sela $+60$

ukupna promjena je 150 stanovnika godišnje

- razlika u broju stanovnika je $5800 - 4000 = 1800$
- s ukupnom promjenom od 150 stanovnika godišnje razlika od 1800 stanovnika će nestati za $1800 : 150 = 12$ godina.

5.7. Metoda uočavanja pravilnosti

Metoda uočavanja pravilnosti usmjerava pažnju učenika na podatke zadane u zadatku i odnos među njima. Učenici promatraju podatke i uočavaju te odnose te tako razvijaju sposobnost generalizacije.

Zadatak 12.

Odredi još tri broja koji nastavljaju započeti niz brojeva 1, 3, 6, 10…

Rješenje

Uočavamo sljedeće:

1 + 2 = 3

3 + 3 = 6

6 + 4 = 10.

Dakle u nizu slijede brojevi 10 + 5 = 15, 15 + 6 = 21 i 21 + 7 = 28. Svaki sljedeći član se uvećava za jedan više od prethodnog.

5.8. Logičke tablice

Logičke tablice primjenjuju se u rješavanju logičkih zadataka. Obilježje tih zadataka je da učenici ništa ne moraju računati nego samo logički zaključivati. Metoda se koristi tako da se u tablicu upisuju podaci iz teksta na način da se upisuje + ukoliko veza između objekata postoji i – ukoliko veza ne postoji. Na taj način zadatak je pregledan i iz tablice možemo iščitati rješenje.

Zadatak 13.

Pročitaj tvrdnje i rješenja unesi u tablicu. Brigita, Jelena, Lucija, Jan i Krešo doručkovali su različita jela. Doručkovali su pahuljice, lubenicu, krafne, jogurt i hrenovke.

Jan nije jeo jogurt ni krafne. Jelena uvijek doručkuje krafne ili lubenicu. Samo Jelena ili Lucija su jele meso. Brigita nije jela krafne. Krešo uvijek doručkuje lubenicu ili pahuljice. Jan ne jede lubenicu. Tko što doručkuje? (pribavljeno 14.4.2018., sa http://www.razredna-nastava.net/stranica.php?id=514)

Rješenje

Prije nego krenemo rješavati zadatak, nacrtamo tablicu u koju ćemo upisivati podatke, tj. postoje li ili ne veze između objekata (Tablica 3.).

Zatim krećemo od prve tvrdnje *Jan nije jeo jogurt ni krafne*. U stupac kod Jana upisujemo – za jogurt i krafne.

Prelazimo na sljedeću *Jelena uvijek doručkuje krafne ili lubenicu* što znači da ne doručkuje ostala jela. U stupac kod Jelene upisujemo – za sva jela osim krafni i lubenice.

Samo Jelena ili Lucija su jele meso, tj, hrenovke, a to znači da ostali nisu jeli hrenovke. Upisujemo – u red za hrenovke kod svih osim Jelene i Lucije. S obzirom na to da smo prethodno isključili da je Jelena doručkovala hrenovke zaključujemo da ih je doručkovala Lucija. U stupac kod Lucije upisujemo + za hrenovke i – za sva ostala jela.

Brigita nije jela krafne. U stupac kod Brigite upisujemo – za krafne.

Krešo uvijek doručkuje lubenicu ili pahuljice, što znači da ne doručkuje ostala jela. U stupac kod Kreše upisujemo – za sva jela osim lubenice i pahuljica. Nakon što smo unijeli ove podatke iz tablice možemo iščitati da je jogurt doručkovala Brigita, a krafne Jelena. Kod Brigite u stupac upisujemo – za sva ostala jela i isto tako kod Jelene.

Jan ne jede lubenicu. U stupac kod Jana upisujemo – za lubenicu i preostaje da je Jan doručkovao pahuljice, a Krešo lubenicu.

	Brigita	**Jelena**	**Lucija**	**Jan**	**Krešo**
Pahuljice	–	–	–	+	–
Lubenica	–	–	–	–	+
Krafne	–	+	–	–	–
Jogurt	+	–	–	–	–
Hrenovke	–	–	+	–	–

Tablica 3. Logička tablica

6. METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA

6.1. Cilj i zadaci

Cilj je ovog istraživanja ispitati pripremljenost studenata, budućih učitelja za rad s matematički nadarenim učenicima. Iz navedenog cilja proizlaze sljedeći zadaci:

- ispitati uspješnost studenata u rješavanju zadataka s matematičkih natjecanja;
- ispitati koriste li studenti učenicima pogodne strategije (metode) rješavanja zadataka.

6.2. Pretpostavke

Pretpostavka je kako će većina studenata Učiteljskog studija biti vrlo uspješna u rješavanju zadataka s matematičkih natjecanja. Očekuje se da neće biti studenata koji će imati manje od 50% bodova. S obzirom na to da su studenti odslušali većinu matematičkih i metodičkih kolegija pretpostavlja se kako će studenti koristiti metode pogodne učenicima mlađe školske dobi.

6.3. Uzorak

Prikupljanje podataka provedeno je u svibnju 2018. godine na Fakultetu za odgojne i obrazovne znanosti u Osijeku te na dislociranom studiju u Slavonskom Brodu. U istraživanju su sudjelovala 64 studenta četvrte godine učiteljskog studija, od toga 41 iz Osijeka i 23 iz Slavonskoga Broda. Važno je istaknuti da je riječ o studentima koji su odslušali sve matematičke i veći dio metodičkih kolegija. Ispitivanje studenata provedeno je u prostorijama Fakulteta u sklopu kolegija *Metodika matematike II.* Rješavanje zadataka s matematičkog natjecanja studentima nije bilo unaprijed najavljeno. Anketiranje nije bilo anonimno, no identitet studenata neće biti javno objavljen jer nije relevantan za ovo istraživanje.

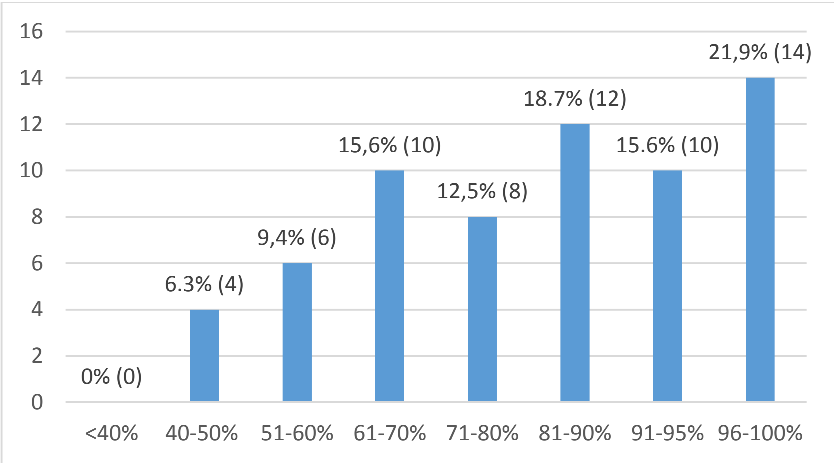
6.4. Instrumenti i postupak prikupljanja podataka

Testiranje uspješnosti studenata u rješavanju zadataka s općinskog (školskog) natjecanja učenika četvrtih razreda osnovnih škola u Republici Hrvatskoj provedeno je na zadacima koji su preuzeti s općinskog natjecanja održanog 2017. godine. (Prilog 1). Studenti su rješavali sedam zadataka – prvih pet se boduje sa maksimalno šest bodova, a posljednja dva s deset bodova. Maksimalni broj bodova koji su studenti mogli prikupiti je 50. Ispravljanje i bodovanje zadataka vršilo se prema uputama objavljenim na službenim stranicama Hrvatskog matematičkog društva (Prilog 2).

Na početku rješavanja zadataka s natjecanja usmeno je izrečena svrha istraživanja i dane su sljedeće upute: zadatke rješavati bez uporabe kalkulatora, za rješavanje zadataka koristiti metode pogodne za učenike mlađe školske dobi. Kako bi se simulirali uvjeti kakve učenici imaju na natjecanju studenti su za rješavanje zadataka imali 120 minuta.

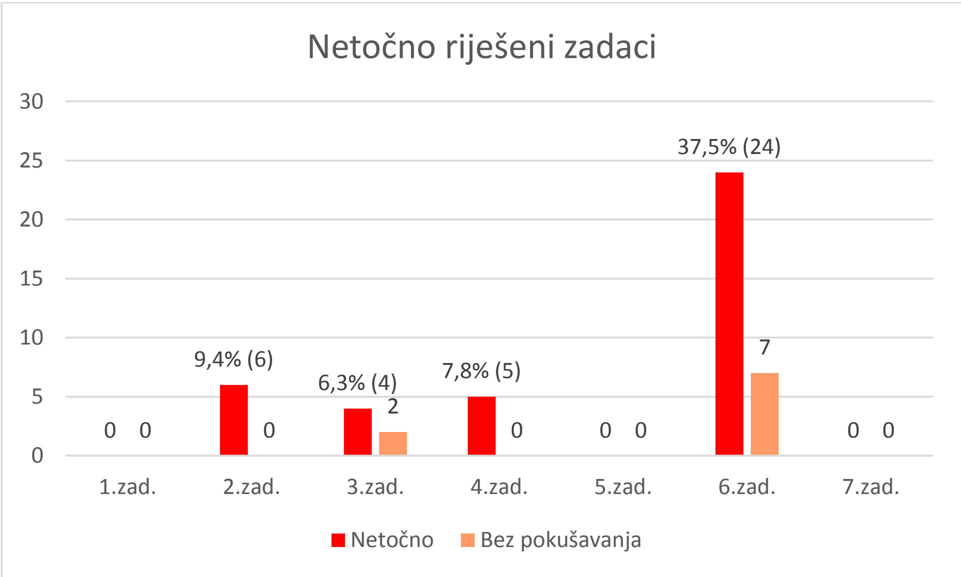
7. REZULTATI I RASPRAVA

U istraživanju su sudjelovala 64 studenta 4. godine učiteljskog studija Fakulteta za odgojne i obrazovne znanosti, 43 studenta iz Osijeka i 21 student iz Slavonskog Broda. Na početku prikazivanja rezultata treba naglasiti kako rješavanje zadataka s matematičkih natjecanja nije apsolutni pokazatelj pripremljenosti budućih učitelja za rad s matematički nadarenim učenika, ali svakako jest jedan od indikatora pripremljenosti.



Graf 1. Uspješnost studenata u rješavanju zadataka

Prema uputama za ispravljanje valjalo je bodovati svaki korak, ispravan postupak i rješenje. S obzirom na to da se u obradi podataka studente nije moglo dijeliti isključivo na to jesu li ili nisu riješili zadatak, uspješnost u rješavanju prikazala se postotkom riješenosti sveukupnog natjecanja. Tako prikazani rezultati vidljivi su na grafu 1. Iz grafa se može iščitati kako nitko od studenata nije imao manje od 40%. Studenti s najmanjom riješenosti nalaze se u intervalu od 40% do 50% i to su četiri studenta. Šestero je studenata u sljedećem intervalu od 51% do 60%. Moglo bi se reći da su studenti okupljeni u ta dva intervala pokazali nisku razinu sposobnosti rješavanja zadataka, jer njihove pogreške nisu samo rezultat površnog čitanja zadataka ili pada koncentracije. Deset je studenata s ukupnom riješenosti od 61% do 70%, a osmero je prikupilo između 71% i 80%. Sljedeći su intervali za studente s uspjehom većim od 80% i smatra se da su ti studenti pokazali visoku razinu sposobnosti rješavanja zadataka. U intervalu od 81% do 90% nalazi se dvanaest studenata. Kako bismo dobili broj onih najuspješnijih studenata koji su u potpunosti ovladali matematičkim i metodičkim znanjima razdvojili smo studente u interval od 91% do 95% (9) i interval od 96% do 100%. Četrnaest se studenata nalazi u intervalu od 96% do 100% što čini 22% ukupnog uzorka što se može smatrati dobrim rezultatom, no samo je njih 6 (9,4% ukupnog uzorka) imalo sto postotnu učinkovitost. Na kraju treba reći kako je očekivano da će broj studenata koji su pri rješavanju zadataka s natjecanja prikupili maksimalnih pedeset bodova biti nešto veći.



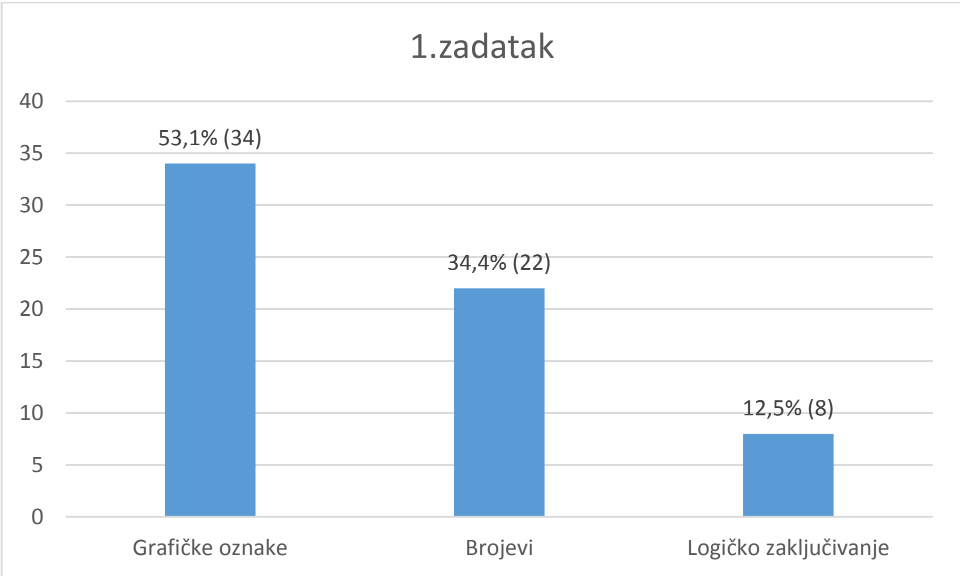
Graf 2. Netočno riješeni zadaci

Ono što se može i zanimljivo je izdvojiti jest broj studenata koji za određene zadatke nisu ostvarili niti jedan bod. Iz tog broja treba izdvojiti one studente koji pojedine zadatke nisu ni pokušali riješiti. Takav način razmišljanja i odustajanje bez pokušavanja rješavanja nije osobina koju bismo htjeli razvijati kod djece stoga je ni budući učitelji ne bi trebali posjedovati. Iz grafa 2. se iščitava kako se problematičnim pokazao 6. zadatak. 24 studenta (37,5%) 6. zadatak nije riješilo točno. Studenti nisu uočili da od ukupnog broja mogu oduzeti zadani zbroj cvjetova triju djevojčica kako bi izračunali broj cvjetova za četvrtu i nisu znali kako riješiti zadatak. Dio je studenata čak pokušao zadatak riješiti sustavom jednadžbi, ali ni u tome nisu uspjeli.

Manji broj studenata nije bio uspješan u rješavanju drugog (9,4%), trećeg (6,3%) te četvrtog (7,8%) zadatka, a nije bilo studenata koji su netočno riješili prvi, peti i sedmi zadatak.

Od 24 studenta koji nisu riješili šesti zadatak njih 7 (29,2%) nije niti pokušalo riješiti isti, a od 4 studenta koji nisu riješili treći zadatak, dvoje (50%) je odustalo bez pokušavanja. Iako nije riječ o velikom broju studenata ipak neki studenti nisu uspjeli riješiti zadatke namijenjene učenicima 4. razreda osnovne škole, učenicima koje bi oni trebali poučavati na dodatnoj nastavi matematike.

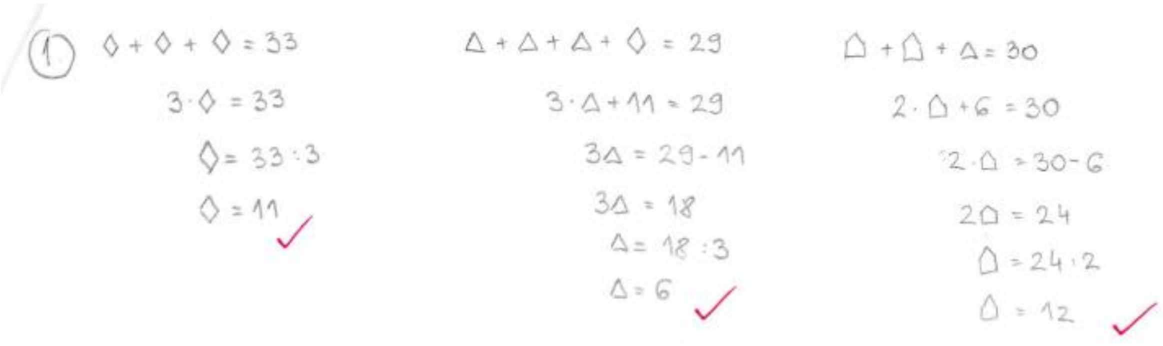
Nadalje, analizom zadataka s natjecanja određene su metode i strategije pogodne za rješavanje svakog zadatka. Nakon toga se analizom studentskih uradaka utvrdila učestalost pojedine metode. Naravno pri ispisivanju metoda i strategija zabilježene su i one koje su ponudili studenti, a koje su primjenjive u radu s učenicima mlađe školske dobi.



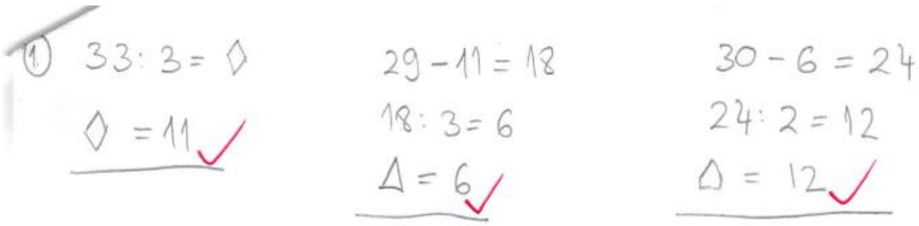
Graf 3. Metode korištene u prvom zadatku

U prvom su zadatku bile zadane tri jednakosti uz korištenje grafičkih oznaka koje su predstavljale nepoznanice. Korištene metode i njihova učestalost prikazane su u grafu 3. Većina studenata, njih 53,1% (34), zadatak je riješilo koristeći zadane grafičke oznake u cijelom postupku rješavanja, primjer vidljiv na slici 6. Nešto manji broj studenata, njih 34,4% (22), zadatak je riješilo tako da je izračunavalo vrijednost određenog znaka i zatim u daljnjem rješavanju uvrstilo tu vrijednost i baratalo s brojevima kao na slici 7. Oba načina rješavanja pogodna su za učenike mlađe školske dobi i učitelj treba pokazati učenicima i potaknuti ih da zadatke rješavaju različitim pristupima. Korištenje grafičkih oznaka i sličica učenicima predstavlja zanimljiv način rješavanja i treba se nekad okrenuti i takvom načinu rješavanja matematičkih problema. Mali broj studenata, njih 12,5% (8), nije prikazalo nikakav postupak u rješavanju što znači da su logičkim zaključivanjem i izračunavanjem napamet došli do rješenja.

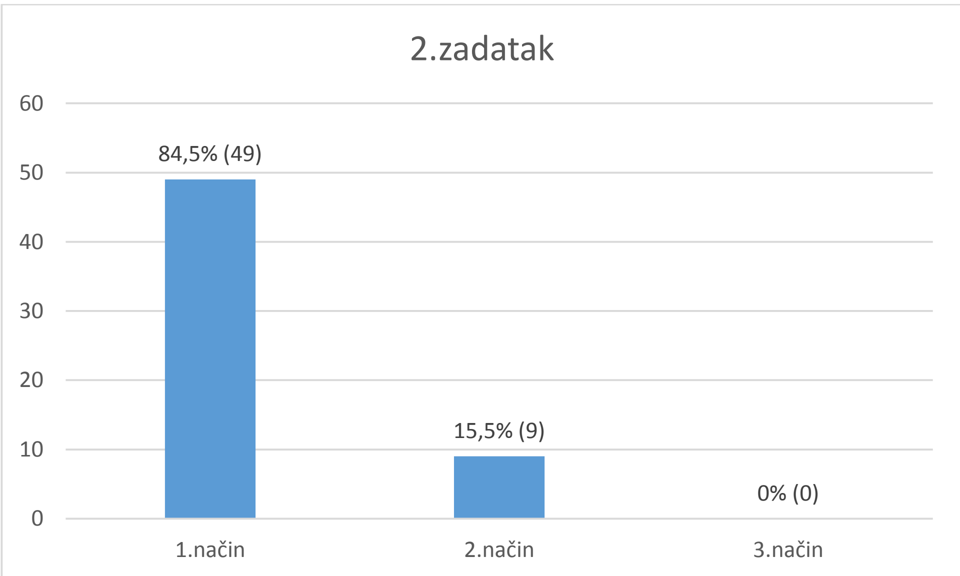
Kako studentima tako i učenicima treba priznati točno rješenje, ali budući učitelji moraju biti svjesni važnosti postupka rješavanja.



Slika 6. Prvi zadatak – grafičke oznake

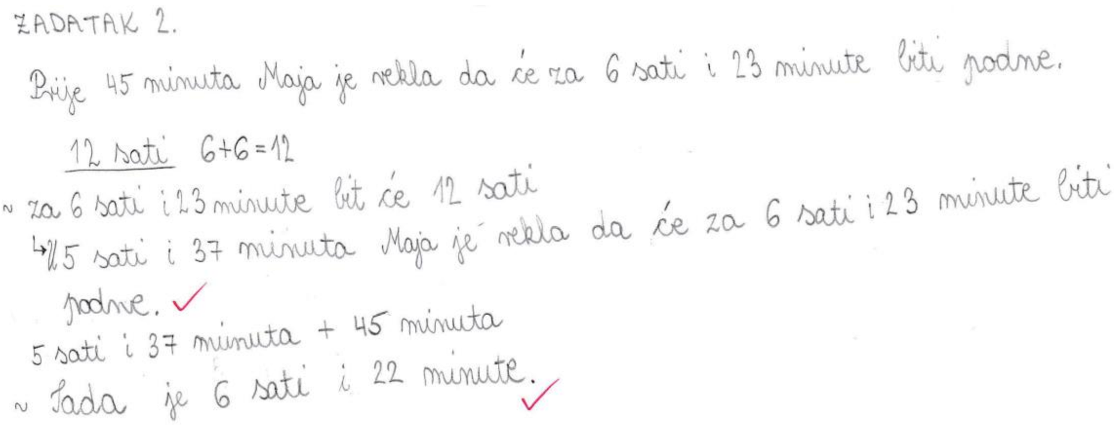


Slika 7. Prvi zadatak – uvrštavanje brojeva

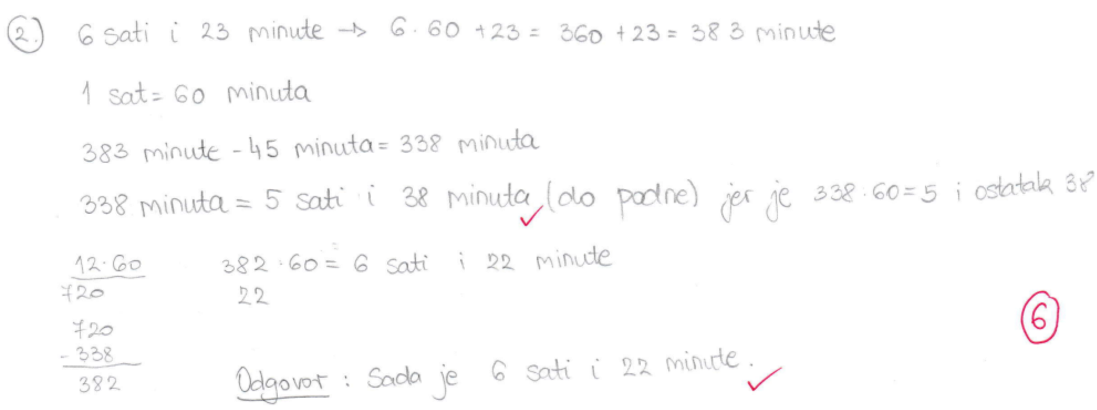


Graf 4. Učestalost korištenih načina u drugom zadatku

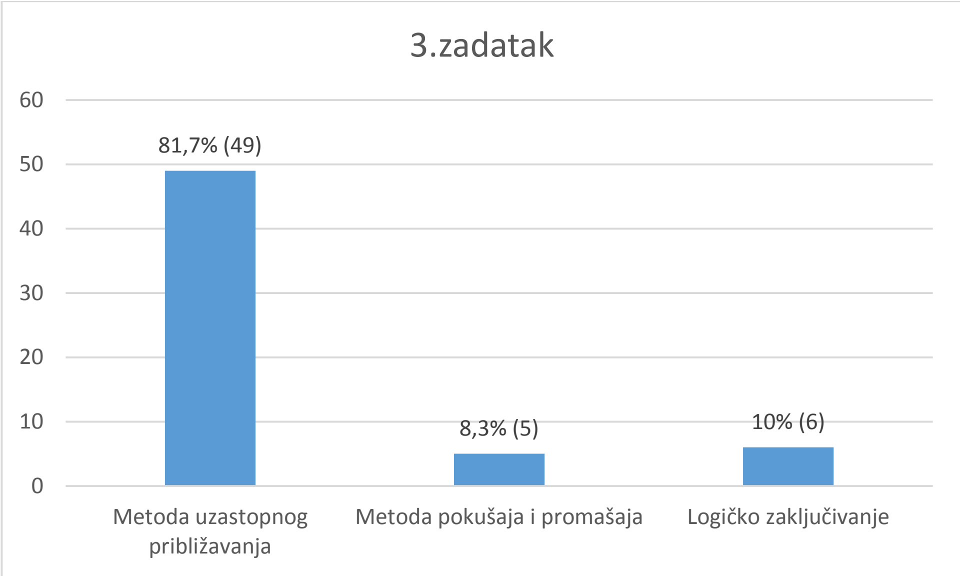
U drugom zadatku studenti su trebali izračunati koliko je sati u određenom trenutku s obzirom na uvjete zadane u zadatku. Do rješenja zadatka moglo se doći isključivo putem ispravnog provođenja računskih radnji. U ponuđenim službenim rješenjima postoje 3 predložena načina rješavanja, a razlikuju se ovisno o tome od kojih podataka pojedinac odluči krenuti. Iz grafa 4. može se iščitati kako je većina studenata, njih 84,5% (49), riješila zadatak započevši od posljednjeg podatka danog u zadatku (slika 8.) što je i prvi navedeni način. Samo 15,5% (9) studenata riješilo je zadatak na drugi način (slika 9.), a nitko od studenata nije zadatak riješio na treći način. Zanimljivo je istaknuti da je 10 od 58 studenata računalo na način da su sve vrijednosti preračunali u minute, a zatim oduzimali i zbrajali minute. Ovo je vrlo domišljat, ali ne i jednostavniji način rješavanja za učenike mlađe školske dobi.



Slika 8. Drugi zadatak – 1.način

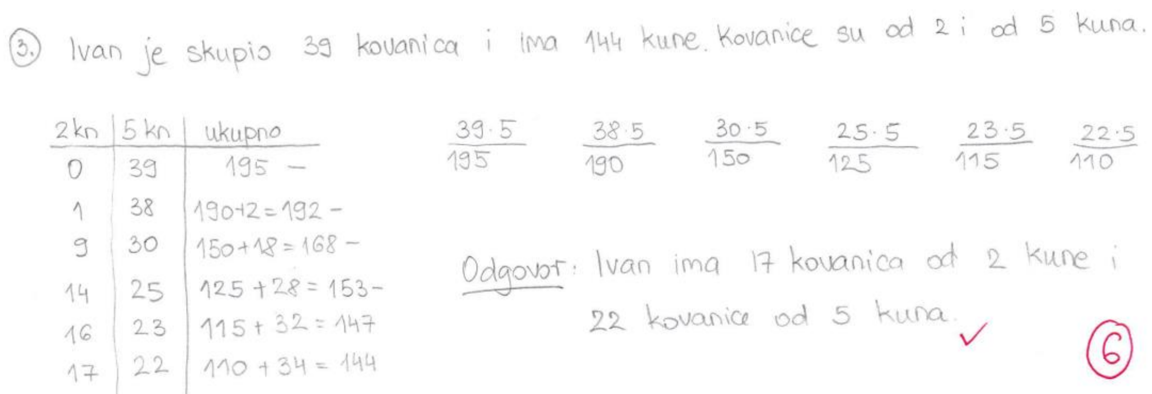


Slika 9. Drugi zadatak – 2. način

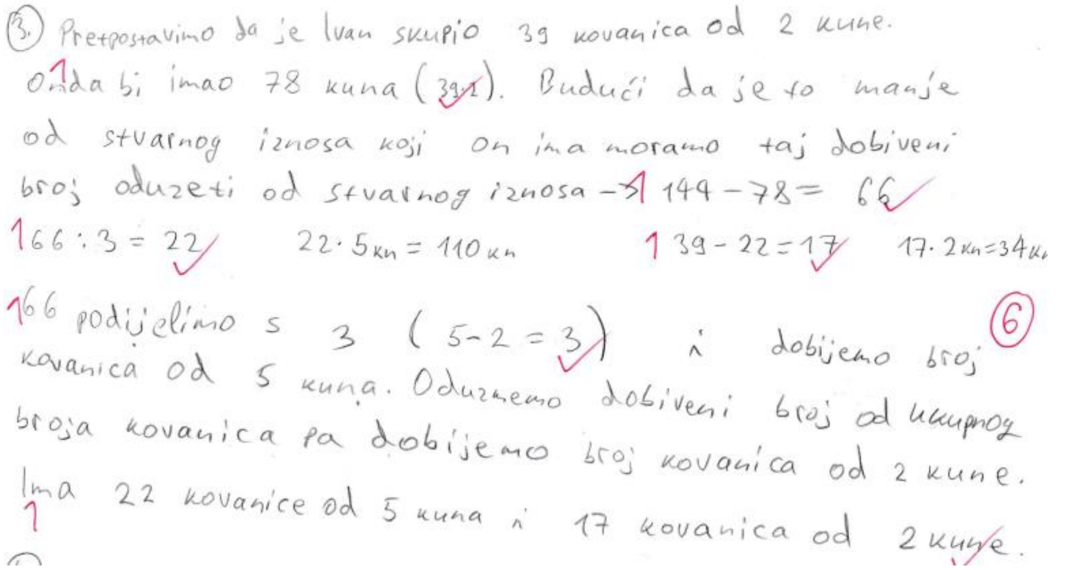


Graf 5. Metode korištene u trećem zadatku

Treći je zadatak studentima omogućio primjenu jedne od metoda koje susreću na kolegiju Metodika matematike, a to je metoda uzastopnog približavanja prikazana na slici 10. Na grafu 5. uočavamo da je većina studenata, njih 81,7% (49), primijenila naučeno i upotrijebila tu metodu. To je vrlo ohrabrujuća činjenica. Tek je manji je broj studenata, 8,3% (5), zadatak riješio metodom pokušaja i promašaja bez sustavne tablice, a 10% (6) studenata je logičkim zaključivanjem došlo do rezultata. Pri logičkom zaključivanju studenti se nisu usredotočili samo na razliku od 3 kune već i na djeljivost brojeva, što je pokazatelj snalažljivosti studenata (slika 11. i 12).



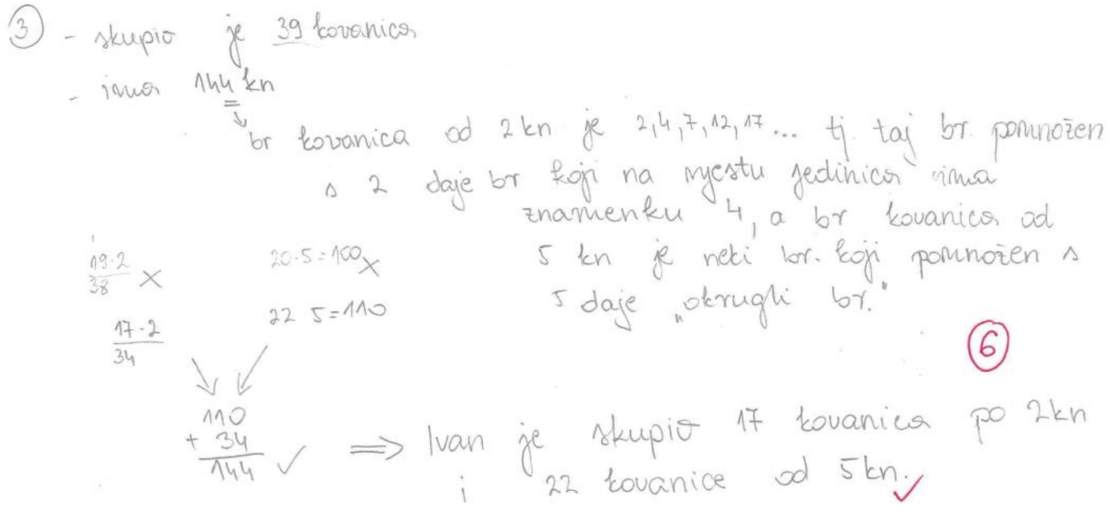
Slika 10. Treći zadatak – metoda uzastopnog približavanja



3. Pretpostavimo da je Ivan skupio 39 kovanica od 2 kune.
Onda bi imao 78 kuna (39·2). Budući da je to manje
od stvarnog iznosa koji on ima moramo taj dobiveni
broj oduzeti od stvarnog iznosa → 144 − 78 = 66
66 : 3 = 22   22·5 kn = 110 kn   39 − 22 = 17   17·2 kn = 34 kn
66 podijelimo s 3 (5 − 2 = 3) i dobijemo broj
kovanica od 5 kuna. Oduzmemo dobiveni broj od ukupnog
broja kovanica pa dobijemo broj kovanica od 2 kune.
Ima 22 kovanice od 5 kuna i 17 kovanica od 2 kune.

6

Slika 11. Treći zadatak – logičko zaključivanje (razlika)



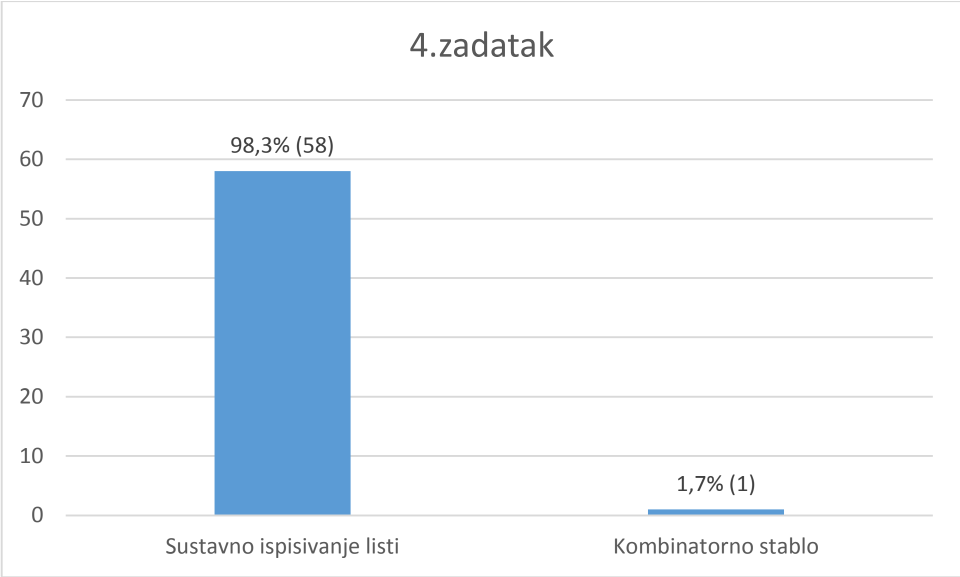
3 - skupio je 39 kovanica
- ima 144 kn
⇓
br kovanica od 2 kn je 2, 4, 7, 12, 17 ... tj. taj br. pomnožen s 2 daje br koji na mjestu jedinica ima znamenku 4, a br kovanica od 5 kn je neki br. koji pomnožen s 5 daje „okrugli br."

19·2 = 38 ×   20·5 = 100 ×
17·2 = 34   22·5 = 110

110 + 34 = 144 ✓ ⇒ Ivan je skupio 17 kovanica po 2 kn i 22 kovanice od 5 kn.

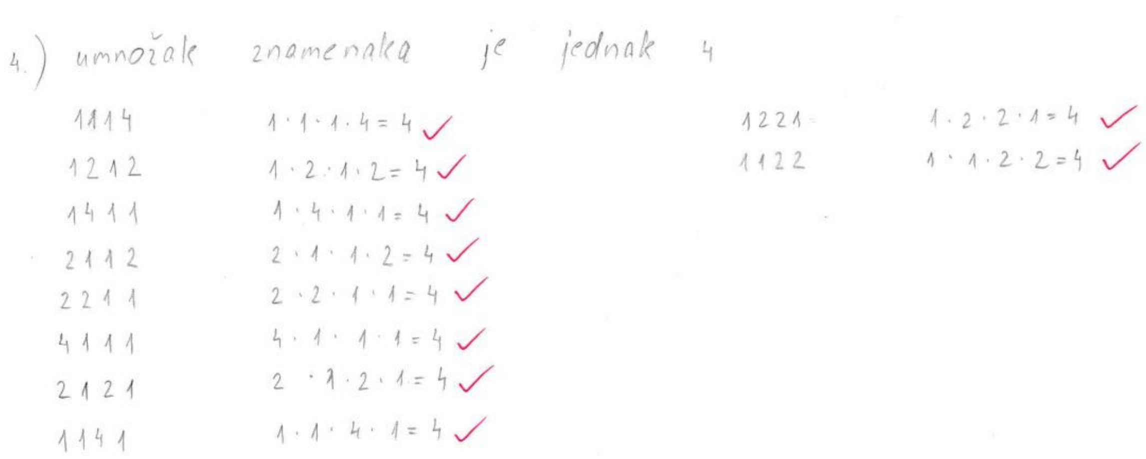
6

Slika 12. Treći zadatak – logičko zaključivanje (djeljivost)

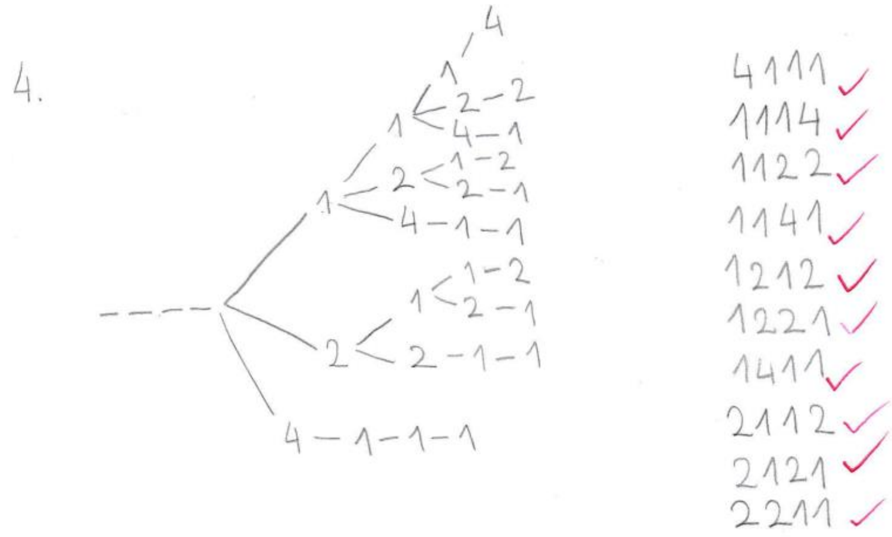


Graf 6. Metode korištene u četvrtom zadatku

U četvrtom zadatku studenti su morali napisati sve četveroznamenkaste brojeve čiji je umnožak znamenaka jednak 4. Prijedlog za rješavanje ovog zadataka je ispisivanje sustavnih listi kao na slici 13. što je princip rada koji želimo da naši učenici usvoje. 98,3% (58) studenata, kao što prikazuje graf 6., je upravo tako riješilo ovaj zadatak. Međutim postoji i iznimka vrijedna spomena, jedan student je u rješavanju koristio kombinatorno stablo (slika 14.). Ovakav grafički prikaz učenicima omogućuje da se lakše snalaze u ispisivanju brojeva jer ukoliko se stablo crta sustavno vrlo je uočljivo ponavlja li se neka znamenka ili je pak neka preskočena. Primjena obiju strategija je poželjna u razrednoj nastavi, a kod ispisivanja većeg broja slučajeva svakako bi bilo dobro koristiti grafički prikaz putem stabla.

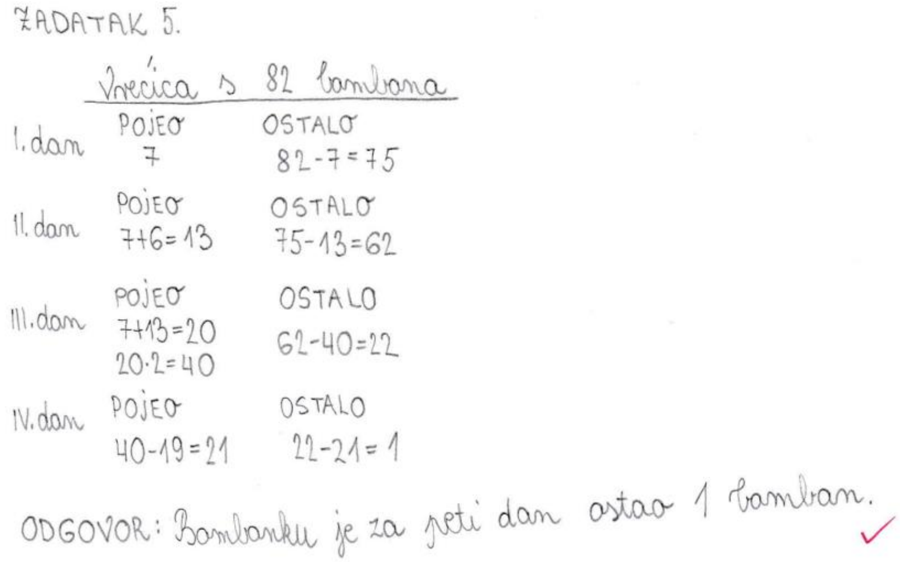


Slika 13. Četvrti zadatak – sustavno ispisivanje

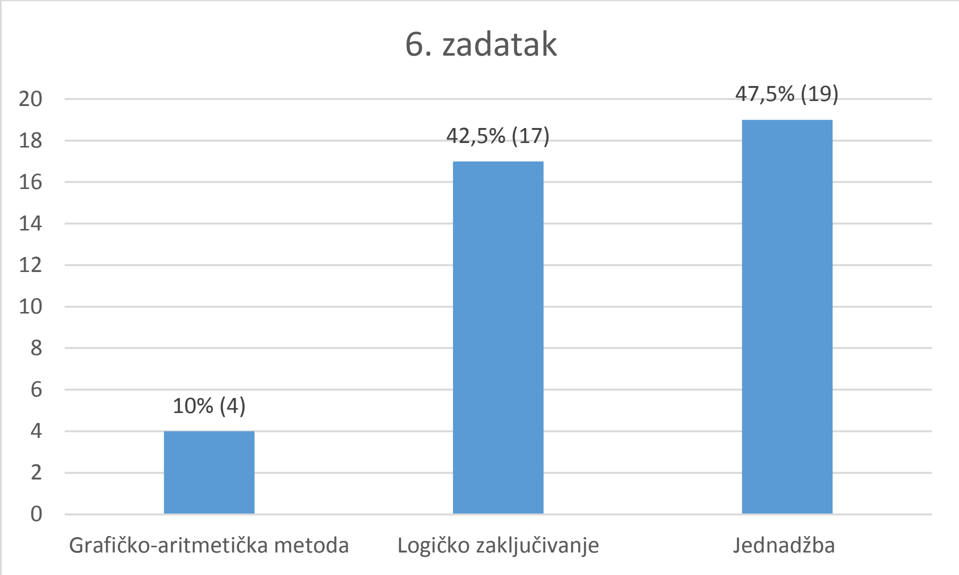


Slika 14. Četvrti zadatak – kombinatorno stablo

Peti je zadatak specifičan jer nije zahtijevao primjenu nikakve metode niti strategije. Potrebno je samo pažljivo čitati zadatak i primijeniti odgovarajuću računsku radnju kao što je prikazano na slici 15. S obzirom na to da se zadatak temeljio isključivo na ispravnom računanju (zbrajanju, oduzimanju i dijeljenju) različite strategije nisu ispisane i grafički prikazane. Treba reći kako je posebno u ovom zadatku nepažljivo čitanje zadatka i ne provjeravanje postupka uzrok gubitka bodova kod velikog broja studenata.



Slika 15. Peti zadatak



Graf 7. Strategije korištene u šestom zadatku

Šesti je zadatak studentima stvarao najviše problema. U ovom zadatku u prvom dijelu je samo logičkim promišljanjem trebalo zaključiti kako se od ukupnog broja cvjetova treba oduzeti zadani zbroj cvjetova triju djevojčica kako bi se dobio broj cvjetova za jednu (četvrtu) djevojčicu i tako za dva slučaja. Drugi dio zadatka gdje se trebao odrediti broj cvjetova za preostale dvije djevojčice mogao se riješiti koristeći 3 različite strategije (graf 7.). Iznenađujuće je da je samo 10% (4) studenata prepoznalo da ovdje mogu primijeniti grafičko-aritmetičku metodu kako bi prikazali odnos između broja cvjetova te dvije djevojčice (slika 16.). Njih je čak 47,5% (19) u rješavanju zadataka pri računanju uvrštavalo „jednadžbu“ K+1 kako je prikazano na slikama 17. i 18., a 42,5% (17) studenata je logičkim zaključivanjem došlo do broja cvjetova (slika 19.). Očekivano je da će studenti u velikom broju ovdje primijeniti grafičko-aritmetičku metodu jer je upravo ona predložena kao zamjena, tj. uvod u Decartesovu metodu rješavanja jednadžbi. U ovom slučaju prikaz odnosa u obliku K+1 neće pretjerano utjecati na složenost zadatka, ali postoje složeniji zadaci u kojima učenici mlađe školske dobi neće moći baratati jednadžbama.

6. 134 ivančice

□ - Katine ivančice

□+1 - Majine ivančice

Maja, Stanka i Kata → 96

Maja, Helena i Kata → 93 → Stanka je ubrala 3 ivančice više od Helene.

Maja, Stanka, Helena i Kata → 134

$$\begin{array}{r} 134 \\ -\ 96 \\ \hline 38 \end{array}$$

Helena je ubrala 38 ivančica.

$$\begin{array}{r} 134 \\ -\ 93 \\ \hline 41 \end{array}$$

Stanka je ubrala 41 ivančicu.

$$\begin{array}{r} 96 \\ -\ 41 \\ \hline 55 \end{array}$$

→ Maja i Kata su zajedno ubrale 55 ivančica.

□+□+1 = 55

□□ = 55-1

□□ = 54

□ = 54:2

□ = 27 → Kata je ubrala 27 ivančica

□+1 = 27+1 = 28 → Maja je ubrala 28 ivančica

10

Slika 16. Šesti zadatak – grafičko aritmetička metoda

$M + S + H + K = 134$

$M + S + K = 96$

$M + K + H = 93$

$M = K + 1$

M - Maja
S - Stanka
H - Helena
K - Kata

$96 + H = 134$

$H = 134 - 96$

$\boxed{H = 38}$

$$\begin{array}{r} 134 \\ -\ 96 \\ \hline 38 \end{array}$$

$93 + S = 134$

$S = 134 - 93$

$\boxed{S = 41}$

$$\begin{array}{r} 134 \\ -\ 93 \\ \hline 41 \end{array}$$

$M + 41 + 38 + K = 134$

$M + K + 79 = 134$

$M + K = 134 - 79$

$M + K = 55$

$$\begin{array}{r} 134 \\ -\ 79 \\ \hline 55 \end{array}$$

$K + 1 + K = 55$

$2K = 55 - 1$

$2K = 54$

$K = 54 : 2$

$\boxed{K = 27}$

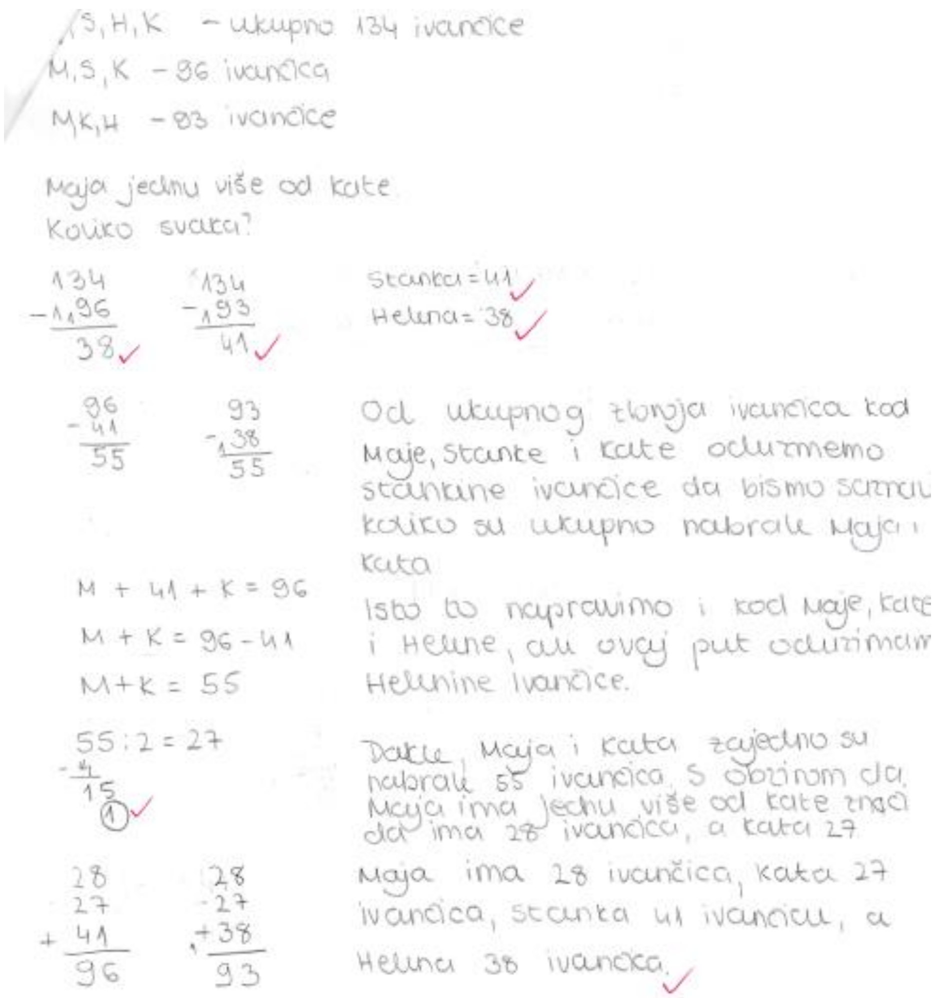
$M = 27 + 1$

$\boxed{M = 28}$

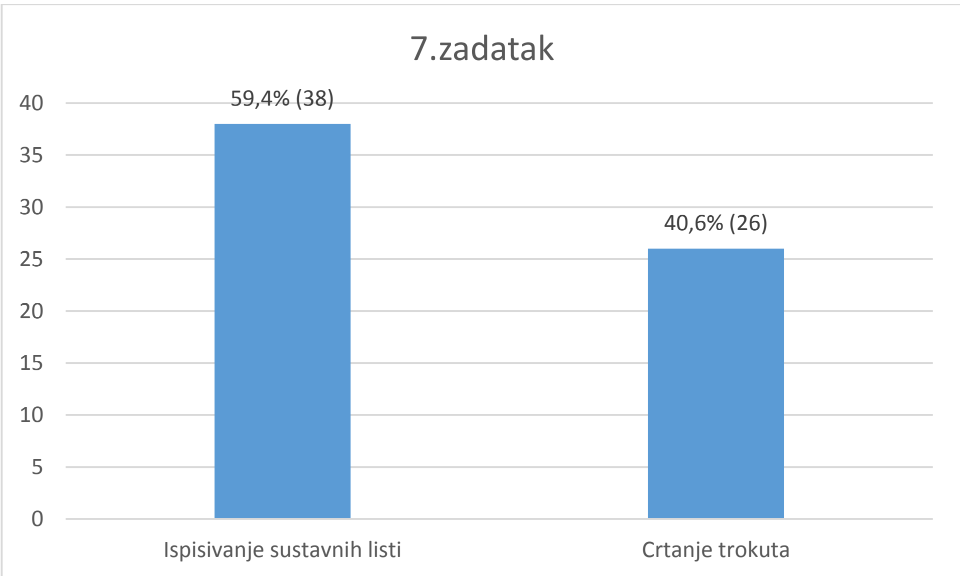
10

Maja je ubrala 28 ivančica, Stanka 41 ivančicu, Helena 38 ivančica i Kata 27 ivančica.

Slika 17. i 18. Šesti zadatak – jednadžba

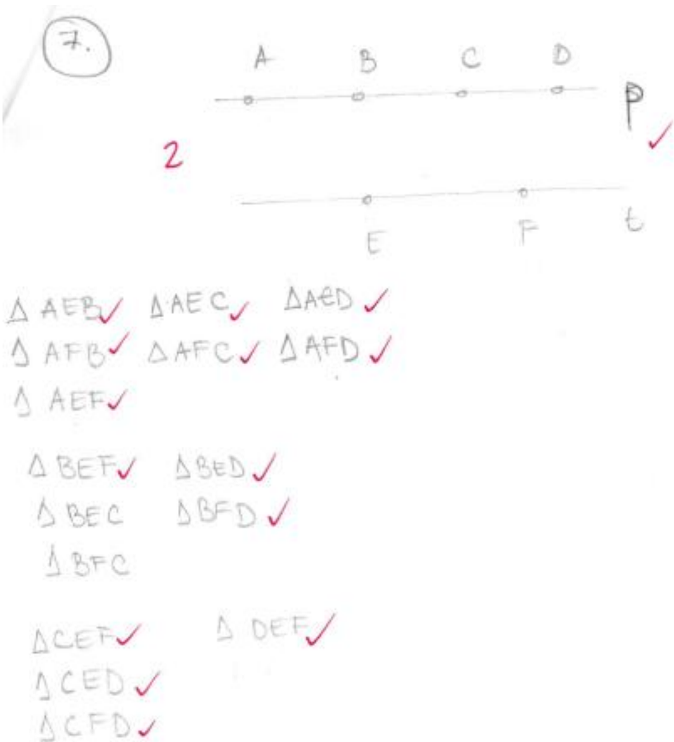


Slika 19. Šesti zadatak – logičko zaključivanje

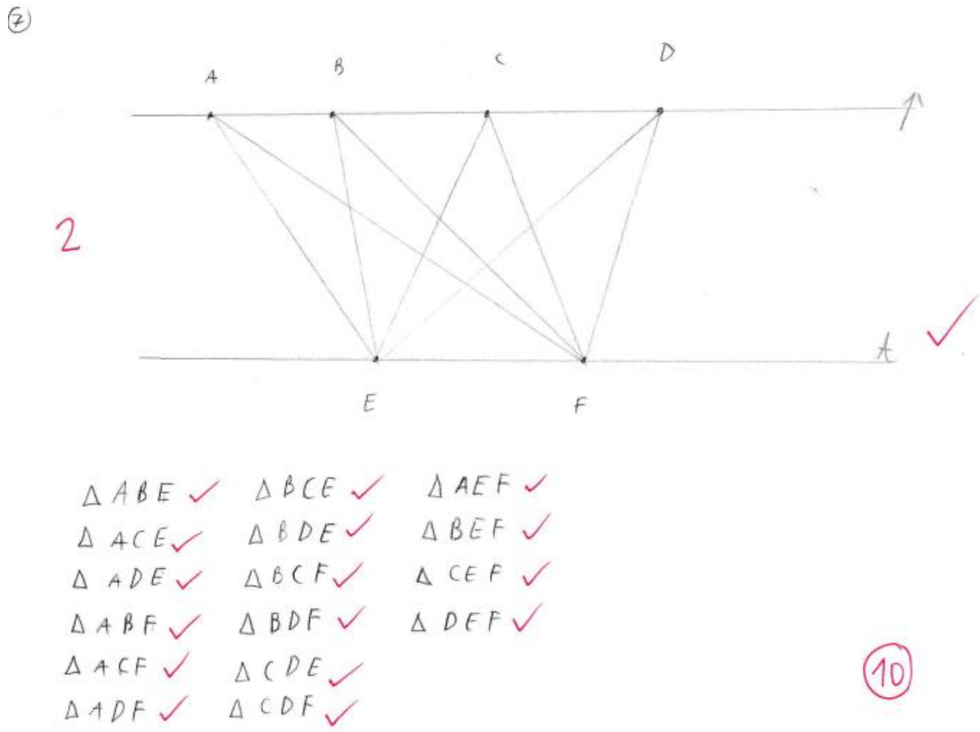


Graf 8. Strategije rješavanja sedmog zadatka

Posljednji, 7. zadatak, bio je iz područja geometrije. Zadatak je bio ispisati trokute kojima su vrhovi točke istaknute na usporednim pravcima. Još jedan zadatak u kojem je ključna sustavnost, no i tu su postojale razlike u rješavanju. Studenti su podijeljeni u dvije kategorije - oni koji su sustavno ispisali trokute kao na slici 20. i oni koji su ih skicirali (crtali među pravcima) i zatim ispisali (slika 21.). Iz grafa 8. može se iščitati kako je nešto veći broj studenata, 59,4% (38), koji su samo ispisali trokute promatrajući skicu dok je 40,6% (26) studenata skiciralo trokute i vizualno označilo svaki od njih, a zatim ih ispisalo. S obzirom na to da se radi o učenicima mlađe školske dobi vizualizacija i konkretnost su vrlo važne pa je, pogotovo prilikom uvođenja zadataka ovog tipa, preporučljivo odrediti svaki trokut i zatim ga zapisati.



Slika 20. Sedmi zadatak – sustavno ispisivanje



Slika 21. Sedmi zadatak – crtanje trokuta

8. ZAKLJUČAK

Rad s darovitim učenicima predstavlja izazov za svakog učitelja. Takvi učenici žele i trebaju više, a naš je zadatak da im to pružimo. Svi učenici, a posebno oni daroviti zahtijevaju individualan pristup kako bi razvili svoje sposobnosti. U velikoj mjeri dodatna nastava nam omogućuje upravo to. Ako je dobro osmišljena dodatna nastava ispunjava potrebe darovitih učenika.

Tijekom svog obrazovanja učitelji trebaju steći znanja potrebna za rad s matematički darovitim učenicima. Govorili smo o osobinama koje treba posjedovati učitelj, a važnu ulogu i nužan preduvjet predstavlja učiteljevo znanje.

Istraživanje provedeno u svrhu ovog diplomskog rada pokazalo je kako su studenti četvrte godine učiteljskog studija Fakulteta za odgojne i obrazovne znanosti u Osijeku vrlo dobro pripremljeni za rad s matematički darovitim učenicima. Većina je studenata bila uspješna u rješavanju zadataka s matematičkih natjecanja. Tek je nekolicina studenata neke od zadataka riješila netočno, a o razlozima ne rješavanja pojedinih zadataka bi se moglo raspravljati.

Budući učitelji trebali bi poznavati različite metode i strategije rješavanja problemskih i logičkih zadataka, a ovo istraživanje je potvrdilo i tu pretpostavku. Pri rješavanju zadataka studenti su koristili metode primjerene za rad s učenicima u početnoj nastavi matematike. Pritom treba istaknuti to da su studenti koristili različite metode, a u tome se očituje i usvojenost ne samo matematičkih nego i metodičkih znanja. Pojedinci se nisu priklanjali uobičajenim putovima dolaska do rješenja već su se domislili originalnijim i domišljatijim načinima rješavanja. Time su također iskazali svoju pripremljenost za provođenje dodatne nastave jer *razmišljanje izvan kutije* je obilježje dobrog učitelja i osobina darovitog učenika.

Učiteljska je figura, pored roditeljske, jedna od ključnih u životu djeteta i tu leži odgovornost našeg zanimanja. Na nama je da prepoznamo najbolje djetetove vještine i sposobnosti te ih razvijemo. Ako mi učitelji ispunimo svoju zadaću te stvorimo uvjete i okolinu u kojoj će učenici razvijati svoje sposobnosti i biti sigurni u njih, zauzvrat će ti učenici ostvariti svoj maksimum. Darovita su djeca društveni potencijal koji ne smije biti zaboravljen i odbačen, oni su naše bolje sutra, a rad s njima predstavlja ulog u budućnost.

PRILOZI

Prilog 1

MINISTARSTVO ZNANOSTI I OBRAZOVANJA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE
IZ MATEMATIKE
26. siječnja 2017.

4. razred-osnovna škola

Zadaci za 6 bodova:

1. U sljedećim jednakostima umjesto nekih brojeva stavljeni su znakovi. Odredi brojeve umjesto kojih su stavljeni znakovi ⌂, ◊ i Δ.

⌂ + ⌂ + Δ = 30
Δ + Δ + Δ + ◊ = 29
◊ + ◊ + ◊ = 33

2. Prije 45 minuta Maja je rekla da će za 6 sati i 23 minute biti podne. Koliko je sada sati?

3. Ivan skuplja kovanice od 2 kune i od 5 kuna. Skupio je 39 kovanica i sada ima 144 kune. Koliko ima kovanica od 2 kune, a koliko od 5 kuna?

4. Napiši sve četveroznamenkaste brojeve kojima je umnožak znamenaka jednak 4.

5. Bombonko ima vrećicu s 82 bombona. Prvi dan je pojeo 7 bombona, drugi dan 6 bombona više nego prvi dan, treći dan je pojeo dvostruko više bombona nego prvi i drugi dan zajedno, a četvrti dan pojeo je 19 bombona manje nego treći dan. Koliko je bombona Bombonku ostalo za peti dan?

Nije dopuštena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika. Okreni list!

Zadaci za 10 bodova:

6. Maja, Stanka, Helena i Kata su šetale livadom i ubrale ukupno 134 ivančice. Maja, Stanka i Kata su ubrale ukupno 96 ivančica, a Maja, Kata i Helena ukupno 93 ivančice. Maja je ubrala 1 ivančicu više od Kate. Koliko ivančica je ubrala svaka djevojčica?

7. Nacrtaj pravac p i na njemu istakni četiri različite točke: A, B, C i D. Zatim nacrtaj pravac t, usporedan s pravcem p, i na njemu istakni dvije različite točke: E i F. Ispiši sve trokute kojima su vrhovi istaknute točke.

Nije dopuštena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Prilog 2

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
26. siječnja 2017.

4. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Iz treće jednakosti slijedi: ◊ = 33 : 3 = 11. 2 BODA

Iz druge jednakosti slijedi:

Δ + Δ + Δ + 11 = 29

Δ + Δ + Δ = 18 1 BOD

Δ = 18 : 3 = 6 1 BOD

Iz prve jednakosti slijedi:

⌂ + ⌂ + 6 = 30

⌂ + ⌂ = 24 1 BOD

⌂ = 24 : 2 = 12 1 BOD

………………………………………………………………………….…. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

◊ = 33 : 3 = 11 2 BODA

Δ = (29 – 11) : 3 = 6 2 BODA

⌂ = (30 – 6) : 2 = 12 2 BODA

…………………………………………………………………………..…. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Svaki otkriveni znak uz objašnjenja ili računanja (iz kojih je vidljiv ispravan način razmišljanja) vrednovati s po 2 boda. Ako nema nikakvog računa niti objašnjenja, sva tri točna znaka vrednovati s 4 boda.

2. Prvi način:

12 h – 6 h 23 min = 11 h 60 min – 6 h 23 min = 5 h 37 min

U 5 h 37 min Maja je rekla da će za 6 h 23 min biti podne. 3 BODA

5 h 37 min + 45 min = 5 h 82 min = 6 h 22 min

Sada je 6 sati i 22 minute. 3 BODA

……………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

6 h 23 min – 45 min = 5 h 83 min – 45 min = 5 h 38 min 3 BODA

12 h – 5 h 38 min = 11 h 60 min – 5 h 38 min = 6 h 22 min

Sada je 6 sati i 22 minute. 3 BODA

……………………………………………………………………….……. UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

12 h + 45 min = 12 h 45 min 3 BODA

12 h 45 min – 6 h 23 min = 6 h 22 min

Sada je 6 sati i 22 minute. 3 BODA

………………………………………………………………..…………..……… UKUPNO 6 BODOVA

3. Kad bi sve kovanice bile od 2 kune, bilo bi ukupno $39 \cdot 2 = 78$ kuna. 1 BOD

Do 144 kune nedostaje još $144 - 78 = 66$ kuna. 1 BOD

Svakom zamjenom kovanice od 2 kune kovanicom od 5 kuna povećat će se iznos za 3 kune. 1 BOD

Da se poveća za 66 kuna, potrebno je 22 kovanice od 2 kune zamijeniti kovanicama od 5 kuna jer je $22 \cdot 3 = 66$. 1 BOD

Ostaje $39 - 22 = 17$ kovanica od 2 kune. 1 BOD

Dakle, Ivan ima 22 kovanice od 5 kuna i 17 kovanica od 2 kune. 1 BOD

………………………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako učenik uzastopnim približavanjem, tj. isprobavanjem različitih mogućnosti, dođe do točnog rješenja, dobiva svih 6 bodova. Ako učenik ima točno rješenje bez ikakvog postupka, dobiva 4 boda.

4. To su brojevi: 4111, 1411, 1141, 1114, 2 BODA

2211, 2121, 2112, 2 BODA

1221, 1212, 1122. 2 BODA

…………………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako među učenikovim rješenjima ima i netočnih, svako netočno rješenje poništava jedno točno.

5. Prvi način:

1. dan Bombonko je pojeo 7 bombona.

2. dan Bombonko je pojeo $7 + 6 = 13$ bombona. 1 BOD

3. dan Bombonko je pojeo $2 \cdot (7 + 13) = 2 \cdot 20 = 40$ bombona. 2 BODA

4. dan Bombonko je pojeo $40 - 19 = 21$ bombon. 1 BOD

Za 5. dan Bombonku je ostalo $82 - (7 + 13 + 40 + 21) = 82 - 81 = 1$ bombon 2 BODA

……………………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

1. dan Bombonko je pojeo 7 bombona.

2. dan Bombonko je pojeo $7 + 6 = 13$ bombona. 1 BOD

1. i 2. dan pojeo je ukupno $7 + 13 = 20$ bombona. 1 BOD

3. dan pojeo je $2 \cdot 20 = 40$ bombona. 1 BOD

4. dan Bombonko je pojeo $40 - 19 = 21$ bombon. 1 BOD

Prva 4 dana pojeo je ukupno 7 + 13 + 40 + 21 = 81 bombon. 1 BOD

Za 5. dan Bombonku je ostao 82 – 81 = 1 bombon. 1 BOD

……………………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

6. Iz podataka je lako izračunati da je Helena ubrala 134 – 96 = 38 ivančica. 2 BODA

Stanka je ubrala 134 – 93 = 41 ivančicu. 2 BODA

Kata i Maja su zajedno ubrale 134 – (38 + 41) = 134 – 79 = 55 ivančica. 2 BODA

Kata je ubrala $\square$ ivančica, a Maja $\square$ + 1 ivančica pa vrijedi sljedeća jednakost:

$2 \cdot \square + 1 = 55$ 1 BOD

$2 \cdot \square = 55 - 1$ 1 BOD

$2 \cdot \square = 54$

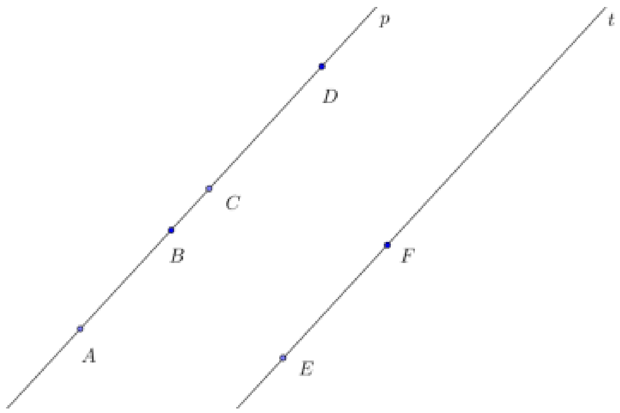
$\square = 27$ 1 BOD

Kata je ubrala 27 ivančica, a Maja za 1 više, znači 28 ivančica. 1 BOD

……………………………………………………………………………...…… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako učenik načini računsku pogrešku, treba dobiti odgovarajući broj bodova za ispravan postupak.

7. Skica: 2 BODA



To su trokuti:

ΔAEF, ΔBEF, ΔCEF, ΔDEF 2 BODA

ΔABE, ΔABF, 1 BOD

ΔACE, ΔACF, 1 BOD

ΔADE, ΔADF, 1 BOD

ΔBCE, ΔBCF, 1 BOD

ΔBDE, ΔBDF, 1 BOD

ΔCDE, ΔCDF. 1 BOD

……………………………………………………………………………...…… UKUPNO 10 BODOVA

LITERATURA

[1]. Cvetković Lay, J., Sekulić Majurec, A. (2008). *Darovito je, što ću s njim.* Zagreb: Alinea.

[2]. Elezović, N. (2007). *Matematička natjecanja i rad s daroviti učenicima.* Zagreb: Element.

[3]. George, D. (2004). *Obrazovanje darovitih*: *Kako identificirati i obrazovati darovite i talentirane učenike*. Zagreb: Educa.

[4]. Kubelka, R., Pelt, R. i Vrbanac, D. (2013). *Dječji talenti*. Zagreb: Ostvarenje.

[5]. Narodne novine. (1991). *Pravilnik o osnovnoškolskom odgoju i obrazovanju darovitih učenika.* Zagreb: Narodne novine d.d. 59/1990.

[6]. Narodne novine. (2014). *Pravilnik o tjednim radnim obvezama učitelja i stručnih suradnika u osnovnoj školi.* Zagreb: Narodne novine d.d. 34/2014.

[7]. Pavleković, M. (2009). *Matematika i nadareni učenici*. Zagreb: Element.

[8]. Winner, E. (2005). *Darovita djeca.* Zagreb: Ostvarenje

Mrežno dostupni radovi:

[9]. Kolar-Šuper, R. Maričić, M. (2015). *Metoda promjene fokusa. Osječki matematički list.* pribavljeno 10.4.2018., sa https://hrcak.srce.hr/161400

[10]. Kurnik, Z. (2003). *Metoda uzastopnih približavanja. Matematika i škola.* pribavljeno 10.4.2018., sa https://mis.element.hr/list/5/broj/19/clanak/208/metoda-uzastopnih-priblizavanja

[11]. Mišurac-Zorica, I., Rožić, E. (2015). *Pripremljenost budućih učitelja razredne nastave za izvođenje dodatne nastave matematike*. *Zb.rad.filoz.fak.Splitu*. pribavljeno 16.10.2017., sa https://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=227798

[12]. Varošanec, S. (2014). *Metoda rješavanja unatrag. Matematika i škola.* pribavljeno 10.4.2018. sa https://mis.element.hr/list/22/broj/77/clanak/1070/metoda-rjesavanja-unatrag

[13]. Varošanec, S. (2002). *Neke metode rješavanja problemskih zadataka. Poučak.* pribavljeno 10.4.2018. sa https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/poucak13.pdf